
inches
centimeters
1 L* 39.12 a* 13.24 b* 15.07
2 65.43 18.11 18.72
3 49.87 -4.34 -22.29
4 44.26 -13.80 22.85
5 55.56 9.82 -24.49
6 70.82 -33.43 -0.35
7 63.51 34.26 59.60
8 39.92 11.81 -46.07
9 52.24 48.55 18.51
10 97.06 -0.40 1.13 0.04
11 (A) 92.02 -0.60 0.23 0.09
12 87.34 -0.75 0.21 0.15
13 82.14 -1.06 0.43 0.22
14 72.06 -1.19 0.28 0.36
15 62.15 -1.07 0.19 0.51
16 (M) 49.25 -0.16 0.01 0.75
17 38.62 -0.18 -0.04 0.98
18 (B) 28.86 0.54 0.60 1.24
19 16.19 -0.05 0.73 1.67
20 8.29 -0.81 0.19 2.04
21 3.44 -0.23 0.49 2.42
22 31.41 20.98 -19.43
23 72.46 -24.45 55.93
24 72.95 16.83 68.80
25 29.37 13.06 -49.49
26 54.91 -38.91 30.77
27 43.96 52.00 30.01
28 82.74 3.45 81.29
29 52.79 50.88 -12.72
30 50.87 -27.17 -29.46
D50 Illuminant, 2 degree observer
Density
Golden Thread
Colors by Munsell Color Services Lab
Don Williams

Zur
BIBLIOTHEC


der Berlin: Geſellſchaft
naturforſchender Freunde
Jageb. IV. V. 356. v. Veltheim
no. 913.

NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORUM VINARIORUM, IN PRIMIS Auſtriaci, figuræ omnium aptiſsimæ;

ET

USUS IN EO VIRGÆ CUBICÆ compendioſiſſimus & plane ſingularis.

Acceſſit

STEREOMETRIÆ ARCHIMEDEÆ Supplementum.

Authore
Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I. ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum Mathematico.

Cum privilegio Cæſareo ad annos XV.

ANNO M. DC. XV.

[1615]

4124401
05/01
AT

LINCII

Excudebat JOANNES PLANCUS, ſumptibus Authoris.

A X B. 124

Z. BIBL. D.
BERL. NATURF.
GESELLSCH.

Illuſtriſſimo Domino

D. MAXIMILIANO,

DOMINO DE LIECHTENSTEIN ET Nickelspurg, Domino Rabenſpurgi, Hohenaugæ, Butſchavizij Poſerizij & Neogradi,

SACRÆ CÆSAREÆ MAIESTATIS CONSILIARIO, Camerario & ſtabuli Præfecto, &c.

Nec non

Illuſtri & Generoſo Domino

D. HELM HARDO IÖRGERO,

IN TOLLET, KEPPACH, GREBING & Hernals, Domino Steireccij & Erlachij, Lib: Baroni de Creüſpach: Archiducatus AVSTRIÆ ſupra ANASUM aulæ Magiſtro provinciali hæreditario:

SACRÆ CÆSAREÆ MAIESTATIS AD CAMERAM aulicam Conſiliario; & pro tempore Provinciæ dictæ ex Baronibus Ordinario;

Dominis meis gratioſiſſimis

CVM SVPERIORI Novembri menſe, ILLVSTRISSIME DOMINE, ILLVSTRIS ET GENEROSE L. BARO, DOMINI GRATIOSISSIMI, novam nuptam domum dedu-

xiſſem; tempore tali, quando Auſtria, vindemiâ copioſâ, nec minus generoſâ collectâ, plurimis onerarijs adverſo Danubio miſſis, opes ſuas Norico noſtro dividebat, litusq; omne Lincianum vaſis vinarijs tolerabili precio venalibus obſtructum viſebatur: conveniens erat officio mariti, boniq; patris familias, ut domui meæ de neceſſario potu proſpicerem. Dolijs igitur aliquot domum illatis & conditis, poſt dies quatuor venit venditor cum virga menſoria, qua vnâ & eâdem cados promiſcuè omnes exploravit ſine diſcrimine, ſine reſpectu figuræ, ſine ratiocinatione vel calculo. Demiſſa enim acie virgæ aeneâ in orificium infuſorium pleni cadi tranſverſim ad calcem vtriusque orbis lignei, quos fundos vernaculo vſu dictitamus, poſtquàm vtrinq; æqualis apparuit hæc longitudo à ventris ſummo ad vtriusq; circularis Tabulæ imum: de nota numeri, quæ erat impreſſa virgæ eo loco, quo deſinebat hæc longitudo, pronunciavit

nume-

numerum amphorarum, quos caperet cadus: ſecundum quem numerum ratio fuit inita precij.

Mirari ego, ſi tranſverſa linea per corpus dimidij cadi ducta argumentum eſſe poſſet capacitatis; dubitare etiam de fide huius dimenſionis; cum cadus inter binos orbes breviſsimus, tantummodò orbibus paulo latioribus, eoq; perexiguæ capacitatis, poſsit habere eandem longitudinem ab infuſorio, ad orbis alterutrius imum. Subijt memoriam laborioſa dimenſio ad Rhenum vſitata: vbi aut cados implent, & per ſingulas liquoris amphoras numerando tranſeunt, cum faſtidioſa temporis occupatione, notasq; capacitatis inurunt vaſis exploratis: aut etſi virgis menſorijs vtuntur, vt plurimum tamen diametros orbium & longitudinem tabularum curvatarum metiuntur: easq; inter ſe multiplicant, variasq; cautiones adhibent, de Orbium inter ſe inæqualitate, ventris amplitudine, curvatura tabularum: neq; ſibi invicem ſatis-

faciunt; quin alij alios erroris arguunt.

Cùm igitur didiciſſem, uſum hunc virgæ tranſverſalis publica hic authoritate ſtabilitum, & juratam illi menſorũ fidem: viſum eſt non inconveniens novo marito, novum Mathematicorum laborum principium, certitudinem huius compendioſæ, & ad rem familiarem perneceſſariæ dimenſionis ad leges Geometricas explorare, fundamentaq;, ſi quæ eſſent, in lucem proferre.

Cùm autem ſpeculatio hæc ſuperiori triduo jucunda quadam varietate ſucceſſiſſet, adeò vt certi quid pronunciari poſſet: jamq; ad perſcribendam & excolendam hanc demonſtrationem, quippe quòd jam erat mente comprehenſa, calamum ſtringerem: non diu mihi quærendi erant, quos dedicatione, quod principium erat libelli, alloquerer; qui ingenij rectitudine demonſtrationum ἀκρίβειαν æquarent, pulchritudinemq; earum ſingulari cupiditate proſequerentur: talem enim Te, Illuſtriſſime Domine de Liechtenſtein, mi-

hi

hi prædicavit Medicus tuus D. Ioannes VVodderbornius Scotus, vir Mathematicis artibus exercitatiſſimus, eòq; mihi amiciſſimus, qui commodùm interveniens, tui memoriam mihi præſentiâ ſuâ renovavit: Talem etiam TE Illuſtris & Generoſe L. B. IÖRGERE, longo uſu cognitum habebam: quâ in laude ita pares eſtis; vt injuriam alterutri facere videri poſſim, quippe vtriuſq; cliens, ſi alterum ſolum nominarem.

Et quid impediat, quo minus collegas hic vos deſignem? quippe in negocio, ubi non jam nobilitatis, non dignitatis, non virtutum politicarum, non ullius rei, quam Mathematicus cernere ſoleat; ſed ingenij tantùm, & ſi licet addere, patrocinij mei æmulatio locum habet.

Nullâ igitur hæſitatione uſus, ſtrenam GG. VV. in ſubeuntes Ianuarij Calendas ex ſpeculatione mea concinnare ſtatui: quâ & de gratitudine in Deum, pro acceptis his alijsq; tranſacti anni beneficijs, vtrinq; admoneremur, juxtàq;

& vos

& vos Patroni ex dedicatione rei gratæ, & ego author ex lectoribus & æſtimatoribus intelligentibus, mutuâ voluptate frueremur: utq; hoc Auſtriæ noſtræ decus, Auſtriacæ potiſſimùm Nobilitatis Proceres, vinique menſurandi ratio, vinearum latiſſimarum poſſeſſores, quibus vinum ad munificentiam uſq; ſuppeteret, patronos haberet.

Valete Gen: Proceres, & ſpeculatione pulcherrimâ, delicijs veſtris conſuetis, animos veſtros oblectate, Annumq; ſubeuntem hilares & macti bonis omnigenis tranſigite: meq; ut conſueſtis, veſtrâ gratiâ porrò quoq; proſequimini. Lincij, XVI. Cal. Ian. Anno Chriſtianorum Occidentalium M. DC. XIII.

Ill^æ & Ill^is GG. VV.

Devotiſſimus

Imp. Cæſ. MATTHIÆ
Ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſ. A.

Mathematicus

Joannes Kepplerus.

STEREOMETRIA DOLIORVM.

Præambulum

DE RATIONE FIGVRÆ DOLII* VINARII.

OMNIS artificioſa & compendioſa dimenſio ſpacij, figuram etiam ordinatam requirit; nam Vaſa nullius certæ, nullius ordinatæ figuræ, ingenium reſpuunt, ſolamq; manum & numerationes ſucceſſivas infuſi liquoris expectant.

Vaſa vinaria, materiæ, ſtructuræ, uſusq; neceſſitate figuram circularem ſortita ſunt, conicæ & cylindricæ affinem. Humor enim in vaſis metallicis diutius contentus corrumpitur ærugine; Vitrea & teſtacea, nec ſuppetunt, nec tuta ſunt; Lapidea ſunt uſu inepta ob pondus: ſupereſt igitur, vt vina ligneis excipiamus condamusq;. At rurſum ex vnica trabe vaſa nec facile, nec ampla, nec in neceſſaria copia parari poſſunt, & ſi poſſent, rimas agunt. Ex multis igitur lignis inter ſe coaſſatis dolia conſtrui oportet. At commiſſuræ lignorum nulla materia, nulla arte muniri contra effluxum humoris poſſunt, niſi ſola vinculorum conſtrictione. Vincula verò cum ſint ex materia flexili, ex Beta, Quercu, aut ſimilibus, vrgente mole ſolubili rerum, quas cum violentia quadam conſtringunt, ſeſe diduntin ambitum omnium capaciſſimum. Summa igitur ratione Vietores rediguntur ad circulos: ne, ſi venter Cadi vt dictum, circularem affectat amplitudinem, ipſi figuram aliam in oris extimis inſtituentes, diſtortum & imbecille Vas efficiant. Videre eſt in Lagenis, quibus Italica vina trans Alpes important in Germaniam; quæ cum, vſu exigente, compreſſæ figuræ ſint, vt ad Mulorum latera appendi, & per anguſtias viarum tranſportari inoffenſè poſſint: & ne longiùs procurrentes à lateribus Mulorum, ex ratione ſtateræ plus gravent jumenta, & quaſſationem reddant violentiorem: qua parte ſunt complanatiores, illa & imbecillius impetum ſuſtinent, facileq; dehiſcunt.

Accedit & commoditas figuræ circularis ſeu Cylindraceæ, vt quia vina plauſtris tranſportanda ſunt per terram; plurimum vini, minimum ligni habeant moles. Quo nomine ſi Globus ex tabulis ligneis coaſſari poſſet, globoſa potiſſimū vaſa futura fuiſſent. At quia Globus vinculis conſtringi nequit, pro Globo Cylinder ſucceſſit. Neq; tamen is purus putus Cylinder eſſe potuit: nam vincula laxata ſtatim fierent inutilia, nec poſſent adigi violentiùs, niſi dolium figura conicâ à medio ventris vtrinq; nonnihil coarctaretur. Eſt & apta hæc figura ad volvendum in directum (vnde Cylindro nomen) adq; vehendum in plauſtris; & geminata baſi, in quandam ſui ipſius ſimilitudinem, librationi commodiſſimam, viſu ſpecioſam, compoſita.

Cum igitur dolia vinaria Circulo Cono & Cylindro, figuris regularibus participent, apta ſunt hactenus ad Geometricas dimenſiones: quarum principia operæ precium eſt in veſtibulo huius ſpeculationis collocare; vt illa ab Archimede ſunt inveſtigata; quantum quidem huius ad oblectationem animi Geometriam amantis ſufficiet: abſolutæ enim & omnibus numeris perfectæ demonſtrationes petendæ ſunt ex ipſis libellis Archimedeis; ſi qui: à ſpinoſa lectione eorum non abhorruerit.

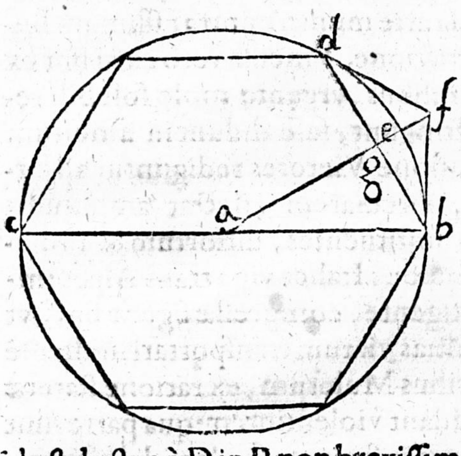
Liceat tamen in quibuſdam locis, quæ non attigit Archimedes, nonnihil immorari; vt inveniant & doctiores, quibus juventur, ſeſeq; oblectent.

Stereometria
I. Pars.
Curvorum regularium ſtereometria.
Theorema I.

Principiò requirebatur cognitio proportionis Circumferentiæ ad Diametrum. Et docuit Archimedes,

Rationem circumferentiæ ad diametrum, eſſe proxime eam, quæ eſt Numeri 22, ad 7.

Schema I.



Ad hoc demonſtrandum vſus eſt figuris circulo inſcriptis & circumſcriptis; quæ cum ſint infinitæ; nos facilitatis cauſa vtemur ſexangula. Sit enim in circulo CBD, regulare ſexangulum, cuiꝰ anguli C, D, B, latus DB, & tangant circulum duæ rectæ in D & B, coeantq; ad communem ſectionem F: & centrum A cum F connectatur lineâ AF, quæ ſecet rectam DB in G, arcum DB in E. Cum igitur DGB ſit recta, i. e. ductus à D in B breviſſimus, DEB vero arcus, id eſt ductus à D in B non breviſſimus, longior igitur eſt DEB, quam DGB.

E contra cum recta BF tangat circulum, omnes igitur partes arcus EB ſunt intra FB verſus GB: quòd ſi EB eſſet recta, omnino brevior eſſet, quàm FB. Nam AEB, FEB anguli ſunt æquipollentes Recto, cum EFB ſit acutus. Ergo EB ſubtenſa minori angulo EFB, minor eſt, quam FB, quippe quæ maiori eſt ſubtenſa. Licet autem argumentari de EB ut de recta, quia vis demonſtrationis ſecat circulum in arcus minimos, qui æquiparantur rectis.

Quanquàm inter ea quæ communi ſenſu ſunt nota, recipi poteſt, arcum DEB, intra triangulum DBF, minorem eſſe lineis DF, FB, quippe qui cum flectatur verſus angulum DFB, nullam tamen particulam habet extra lineas DF, FB: comprehendens autem, ſenſu communi majus eſt comprehenſo. Secus haberet, ſi arcus DEB eſſet linea flexuoſa & inordinata.

Cum igitur DB ſit latus inſcripti ſexanguli, & DF, FB ſint duæ medietates circumſcripti ſexanguli; arcus DEB erit circuli pars ſexta: major verò erat quàm DB, minor quàm DF, FB. Sex igitur lineæ DB, minores ſunt quàm circumferentia circuli, & duodecim lineæ DF, vel FB, ſunt maiores quàm circumferentia

Eſt autem DB latus ſexanguli regularis, æquale ipſi AB ſemidiametro. Sex igitur diametri AB, hoc eſt tres diametri CB, vel (diametro in ſeptem æqualia diviſa) Viginti & vna ſeptimæ, ſunt breviores circumferentia.

Cum

Viciſſim cum DG, GB ſint æquales, erit GB dimidium ipſius AB. Quadratum verò AB æquale eſt junctis AG, GB quadratis, & eſt quadruplum quadrati GB, ergo AG eſt triplum quadrati GB. Proportio igitur quadratorum AB & AG eſt ſeſquitertia linearum igitur AB & AG proportio eſt ſemi-ſeſquitertia, ſcilicet ea quæ numerorum 100000 & 86603. Vt vero eſt AG ad AB, ſic eſt GB ad BF. Ergo etiam inter GB & BF eſt proportio ſemi-ſeſquitertia; vt quia GB eſt dimidium ipſius AB, ſcilicet 50000; BF talium particularum habeat 57737 proximè. Duodecies igitur ſumptus numerus iſte, maior erit quam circumferentia circuli. Colligitur numerus 477974, qualium diameter habet 200000. Et qualium diameter habet 7, talium ſunt in BD duodecies ſumpta 24, minus vna decima. Maior igitur eſt hic numerus ipſa circumferentia; Minor autem eadem erat numerus 21. Et patet ad oculum, arcum BE propiorem eſſe ipſi BG, quam BF lineæ. Circumferentia igitur propior eſt numero 21, quam numero 24, minus vna decima. Ponitur igitur ab 21 receſſiſſe per 1, ab altero verò per 2, minus vna decima, vt ſit nimirum 22. Hæc autem longè accuratius demonſtrat Archimedes in figuris multilateris, vt ſunt figuræ 12, 24, 48 laterum: vbi etiam apparet, paulum quid deeſſe circumferentiæ, quo minus ſit 22. Adrianus Romanus eadem Methodo demonſtravit, ſi diameter circuli ſecetur in partes — — — 20000000000000000
tunc talium partium 62831853071795862 ferè eſſe in circumferentia.

Epiſagma.

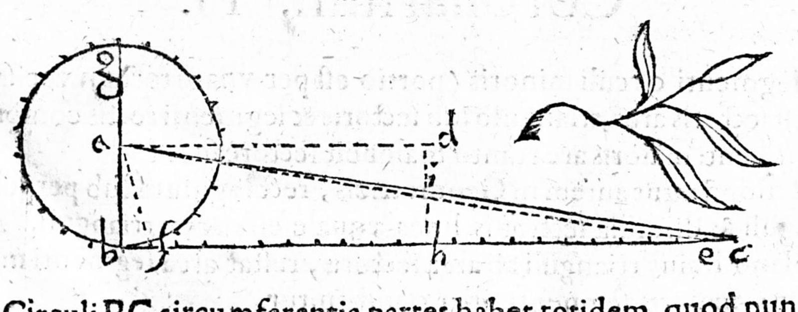
Ex tribus lineis ſectionum Conicarum, quæ Parabole, Hyperbole, Ellipſis dicuntur, Ellipſis eſt circuli æmula, & demonſtravi in Com. de Motibus Martis, longitudinem Ellipticæ lineæ ſeſe habere ad medium arithmeticum inter duas ejus diametros, quæ axis rectus & tranſverſus dicuntur, ſimiliter vt 22. ad 7. fere.

THEOREMA II.

Circuli area ad aream quadratam diametri comparata, rationem habet eam quam 11. ad 14. fere.

Archimedes vtitur demonſtratione indirecta, quæ ad impoſſibile ducit: de qua multi multa: Mihi ſenſus hic eſſe videtur.

Schema II.



Circuli BG circumferentia partes habet totidem, quod puncta, puta infinitas; quarum quælibet conſideratur vt baſis alicuius trianguli æquicruri, cruribus AB: vti ita Triangula in area circuli inſint infinita, omnia verti-

verticibus in centro A coeuntia. Extendatur igitur circumferentia circuli BG in rectum, & ſit BC æqualis illi, & AB ad illam perpendicularis. Erunt igitur infinitorum illorum Triangulorum, ſeu Sectorum, baſes imaginatæ omnes in vna recta BC, juxta invicem ordinatæ: ſit vna talium baſium BF quantulacunq;, eiq; æqualis CE, coñectantur autem puncta F, E, C, cum A. Quia igitur triangula ABF, AEC totidem ſunt ſuper recta BC, quot ſectores in area circuli, & baſes BF, EC æquales illis, & omnium communis altitudo BA, quæ etiam eſt ſectorum; Triangula igitur EAC, BAF erunt æqualia, & quodlibet æquabit vnum ſectorem circuli; & omnia ſimul in linea BC baſes habentia, id eſt Triangulum BAC, ex omnibus illis conſtans, æquabit ſectores circuli omnes, id eſt aream circuli ex omnibus conſtantem. Hoc ſibi vult illa Archimedea ad impoſſibile deductio.

Diviſa igitur BC biſariam in H, fiat ABHD parallelogrammum, vt DH ſecet AC in I. Erit hoc parallelogrammum Rectangulum æquale areæ circuli. Nam vt GB tota ad GH dimidiam, ita & AB, id eſt DH tota, ad IH dimidiam. Igitur HI æquat ID, & HC æquat DA, id eſt HB: & anguli ad I æquales, D vero & H recti. Triangulum igitur ICH, quod eſt extra parallelogrammum, æquale eſt triangulo IAD, quo parallelogrammum excedit trapezium AIHB.

Cum igitur diameter GB ponatur eſſe partium *7*, quadratum diametri erit *49*. Et cum harum partium 22 ſint in circumferentia, ſc: in BG, dimidia BH habebit earum 11, paulo minus, vt ſupra. Duc 11 in ſemidiametrum 3 ſemis, ſc: in AB: fiet Rectangulum AH 38 ſemis.

Qualium ergò Quadratum diametri			Talium Area circuli inſcripti
ht.	49.	ht.	38 ſemis.
bis	98.	—	77.
Diviſi per 7. faciunt	14.	—	11. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. I.

Sectoris in circulo (conſtituitur rectis ex centro, & ex arcu intercepro) area eſt æqualis rectangulo ſub ſemidiametro & dimidio arcu.

Corollarium. II.

Segmenti circuli minoris (portio eſt per vnam rectam reciſa) area minor eſt ſectoris areâ, triangulo ſub ſectoris & ſegmenti rectis comprehenſo: Segmenti maioris area tanto maior eſt ſectore ſuo.

Demonſtratur autem in Geometricis, rectangulum ſub perpendiculo trianguli & dimidia ſectionis linea æquale eſſe areæ trianguli. Ablato igitur plano huius trianguli ab area ſectoris, reſtat area ſegmenti minoris, ſed addito, maioris ſegmenti area conſtituitur.

In Schemate I. DABE eſt ſector minor, DABCD maior; DGBE ſegmentum minus, DGBC maius; DBA triangulum, quo ſector à ſegmento differt.

differt. Id habet duas partes æquales & congruas, AGB, AGD. Appoſito igitur angulo DAG ad GBA, ſic ADG ad GAB, fit rectangulum altitudine AG, latitudine GB. Et dicitur in Triangulorum doctrina, GB ſinus arcus EB dimidij, GA ſinus eius complementi.

Epiſagma I.

Circulo commune hoc eſt cum Parabola; quod in vtraq;, portiones quomodocunq; per vnam rectam abſciſſæ, ſi æquales habuerint diametros, & ipſæ inter ſe in qualibet figura ſint æquales. Arch. de Conoid. IV.

Epiſagma II.

Paraboles area eſt ſeſquitertia areæ Trianguli, habentis eandem cum Parabola baſin rectam, & eandem altitudinem. Arch. de Quadr. Parabolæ Prop. XVII. & XXIV.

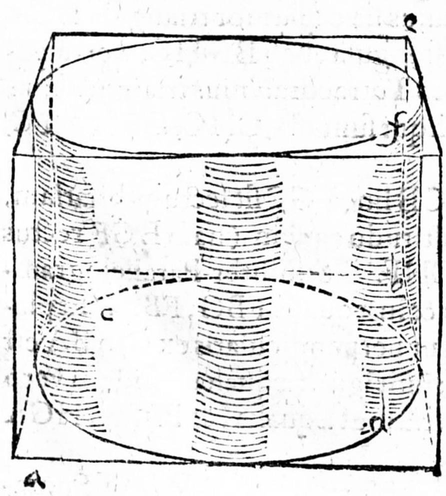
Epiſagma III.

Ellipſis area, ad aream circuli eſt, vt minor Ellipſis Diameter ad maiorem: Et vt circulus ad quadratum diametri, ſic Ellipſis ad Rectangulum diametrorum, ſcilicet etiam vt 11. ad 14. feré. Arch: Sphæroid.

THEOREMA. III.

Cylindri vero ad Parallelepipedum columnare rectangulum æq;altum, quod Cylindri corpus ſtringit quadratis ſuis baſibus & parallelis lateribus, ratio eſt eadem, quæ circuli ad quadratum circumſcriptum, hoc eſt eadem quæ 11. ad 14.

Schema III.



Vt enim CD Cylindrica baſis circularis ad AB quadratum circumſcriptum, ita CF corpus Cylindri, ad AE corpus parallelepipedi rectanguli, ſeu columnæ.

Arch: de Sphæra & Cylindro.

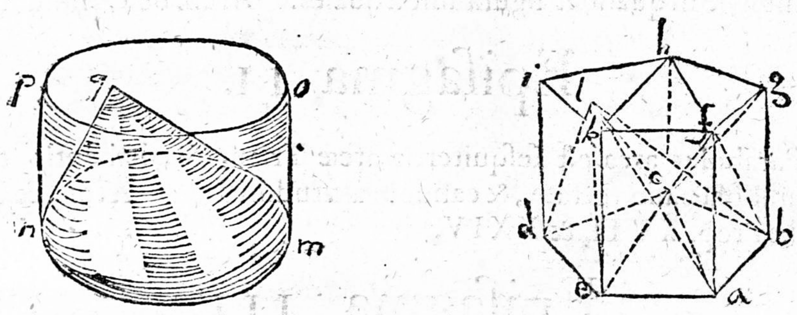
Cylinder enim & columna æquealta ſunt hic veluti quædam plana corporata: acciduntigitur illis eadem quæ planis.

Stereometria

Theorema IV.

Si Columna recta parallelarum Baſium cum Pyramide, ſi Cylinder cum Cono eandem baſin habuerit eandemq; altitudinem, Triplum erit illius.

Schema IV.



Nam omnis Columna, vt hic quinquangularis BI, baſes ABCDE & FGHIK parallelas habens, & BAF, AEK cæteroſq; angulos rectos, ſolvitur in ſua Pentaedra ſeu Priſmata, vt hic quinquangularis in tria GHF, FHK, KHI, Trinis parallelogrammis & binis triangulis oppoſitis clauſa.

	Primi	Secundi	Tertij.
Triangula	GHF BCA	FHK ACE	KHI ECD
Parallelogramma.	GHCB HCAF FABG	HCAF FAEK KECH	KECH HCDI IDEK

Pentaedron vero in tria Tetraedra ſolvitur, quorum bina ſemper, quæ vnum Planum Parallelogrammum ex æquo dividunt, æquealta ſunt.

Sit verbi gratia Priſma primum ſub GHF, BCA triangulis. Ducantur in Parallelogrammis BGFA & AFHC diagonij BF, CF, ex trianguli BCA, angulis B, C. Iis reſecatur Tetraedron, cuius hæc quatuor triangula BCA BFC, BFA, AFC. Reſtat Pyramis quadrangula, baſi BGHC, vertice F. Ducta igitur diagonios GC ſecat eam in duo Tetraedra: vnius triangula quatuor ſunt iſta BGC, GFB, GFC, CFB: reliqui ſunt iſta, GHC, GFH, HFC, CFG.

Cùm igitur Parallelogrammum GHCB lineà GC ſit ſectum bifariam, & triangula GCH, GCB æqualia, & GF altitudo eadem (nam BGF rectus eſt) æqualia erunt Tetraedra GCBF, GCHF. Similiter Parallelogrammum GFAB lineà BF ſectum eſt bifariam & in æqualia FBG, FBA. Et planum BCA rectum eſt ad planum GA, igitur perpendicularis ex G in BA eſt altitudo Tetraedorum GBFC, & ABFC: ſunt igitur æqualia. Eidem verò GBFC fuit æquale GCFH. Omnia igitur tria ſunt æqualia, & Priſma HGA habet tria æqualia Tetraedra.

Suma-

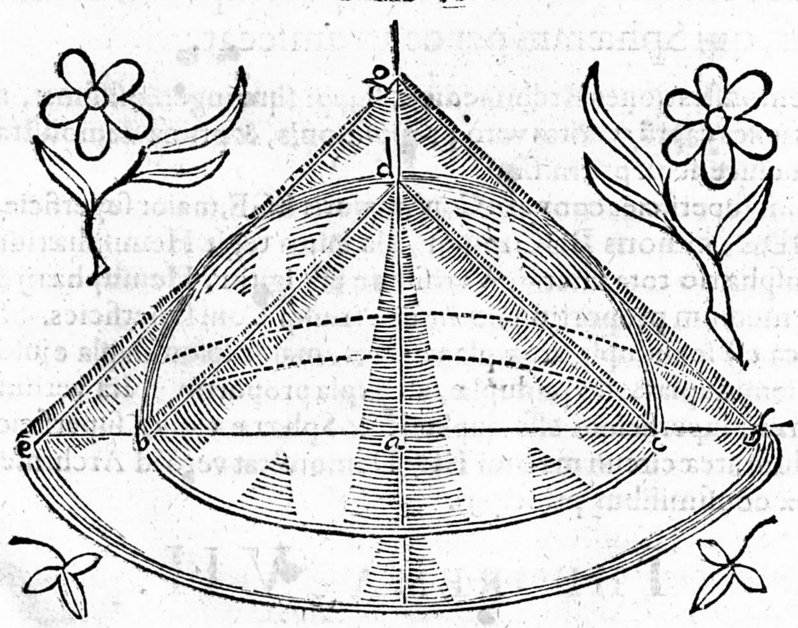
Sumatur jam in baſi ſupera FGHIK, punctum L, quod connectatur cum angulis baſis inferæ ABCDE, vt creetur Pyramis quinquangula: Dico illam eſſe tertiam partem columnæ GAD. Nam baſis ABCDE, lineis AC, EC in triangula tria eſt diviſa vt prius, ſuper quæ ſtant & tria Pentaedra, & tres partes Pyramidis, ſc. ABGL, ACEL, ECDL, & perpendicularis ex L demiſſa in planum BD, æquat recta latera KE, FA & cætera. Eſt igitur eadem altitudo Tetraedrorum ABCF, ABCL; ſunt igitur æqualia. Sed ABCF eſt tertia pars Priſmatis ABC FGH: Ergo & ABCL ejuſdem tertia pars eſt. Similiter verò ſecunda Pyramidis pars ACEL, ſecundi Priſmatis; & tertia ECDL, tertij priſmatis tertiæ ſunt Partes: Tota igitur Pyramis totius Columnæ tertia pars eſt; & hæc illius ergò Triplum.

Eodem verò modo & MNOP Cylinder, cuius baſes MN & OP parallelæ, æquat tres conos MNQ, vertice Q ad ſuperioris baſis planum pertingentes, & eandem baſin MN habentes. Demonſtratio enim analogicè applicari eadem poteſt, ſi perpendas, circulum, qui baſis eſt Cylindri & Coni, in infinita triangula ex centro dividi, quibus totidem Priſmata, totidemq; partes Coni ſuperſtent, illa in axe Cylindri, hæ in axe Coni convenientes.

THEOREMA V.

Superficies curva Coni Rectanguli inſcripti Hemiſphærio, eſt ſemidupla Baſeos, ſeu circuli maximi in ſphæra, dimidia Baſeos Coni rectanguli circa Hemiſphærium.

Schema V.



Sphæra BDC ſecetur plano per centrum A, & ſectio BC continuetur, fiantq; duo Coni Rectanguli, alter totus intra Hemiſphærium BDC, cujus axis recta AD, ex centro A, diametro perpendicularis: ſitq; BDC, baſin BC

& ver-

& verticem D eundem habens cum Hemiſphærio; alter totus extra Hemiſphærium, ſtringens illud mediæ ſuæ ſuperficiei lateribus, quæ ſint EG, FG, parallela ipſis BD, CD, habens verticem G, in axe prioris AD continuato, baſin vero EF in plano ſphæram ſecante. Cum igitur BA & AD ſint æquales; erunt etiam EA ſemidiameter baſis maioris, & AD altitudo Coni exterioris æquales: Et quia EGF rectus, erit igitur EG quadrati circulo circumſcripti latus, eoq; equalis diametro GC. Sed EF quadratum, æquale eſt duobus quadratis EG & GF, æqualibus diametro BC: Ergo quadratum EF duplum eſt quadrati BC: circulus igitur EF duplus eſt circuli BC. Dico etiam ſuperficierum conicarum inter ſe proportionem eſſe duplam, & minoris conicæ curvæ ſuperficiei proportionem ad aream baſis BC eſſe ſemiduplam.

Nam per ea quæ dicta ſunt Theor. II. rectangulum ſub ſemidiametro AB, & circumferentia tota BC, duplum eſt areæ circuli BC. Eodem verò modo, eademq; demonſtrationis vi, rectangulum ſub tota BD & tota circumferentia BC, eſt duplum conicæ curvæ ſuperficiei BDC. Quare vt AB ad BD, ſic ſuperficies plana circuli BC, ad curvam Coni BDC. Sed proportio AB ad BD eſt ſemidupla, quia quadratorum proportio eſt dupla; ergo & ſuperficierum dictarum proportio eſt ſemidupla. Et quia ſunt Coni ſimiles; vt igitur baſis BC plana ad Curvam BDC: ſic plana EF ad curvam EGC; & permutatim, vt baſis ad baſin, ita conica ad conicam curvam: dupla verò eſt proportio inter baſes; dupla igitur & inter conicas curvas.

THEOREMA VI.

Convexum Sphæricum eſt quadruplum, areæ circuli maximi, qui Sphæram per centrum ſecat.

Demonſtrationes Archimedis & Pappi ſunt ingenioſiſſimæ, nec admodum faciles captu: veritas verò propoſitionis, & prima demonſtrationis elementa elucent ex præmiſſis.

Eſt enim ſuperficies convexa Coni, maioris EGF, maior ſuperficie Hemiſphærij BDC, minoris BDC minor; illa enim tegit Hemiſphærium, hæc ſub Hemiſphærio tota latet. Veriſimile eſt igitur, Hemiſphærij ſuperficiem eſſe medium proportionale inter vtriuſq; Coni ſuperficies. Sed minor conica eſt ſemidupla areæ planæ baſis, maior ſeſquidupla ejuſdem; & medium ſemiduplæ & ſeſquiduplæ, eſt dupla proportio. Ita veriſimile fit, Hemiſphærij ſuperficiem eſſe duplam, & Sphæræ totius ſuperficiem eſſe quadruplum areæ circuli maximi BC. Demonſtrat verò id Archimedes neceſſariò ex conſimilibus principijs.

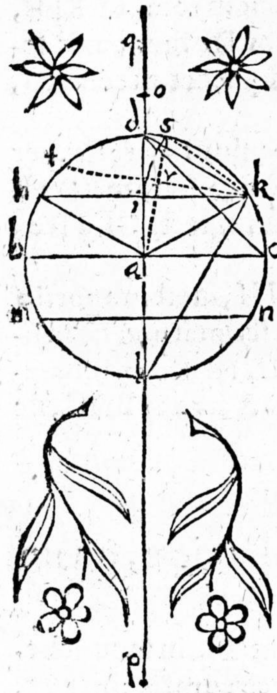
THEOREMA VII.

Convexum cuiuslibet ſegmenti ſphæræ eſt æquale plano circuli, cujus ſemidiameter ſubtendit ſegmenti latitudinem à Polo ad baſin.

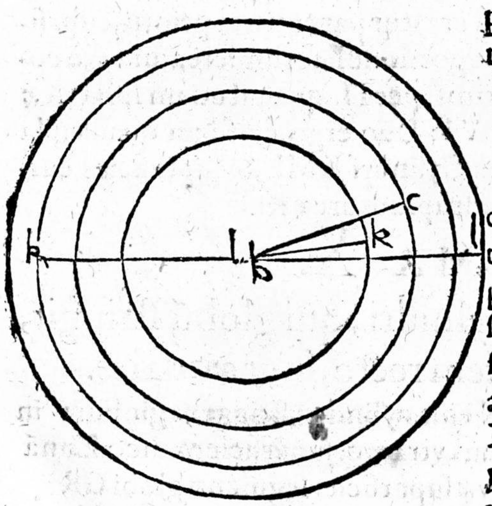
Segmenta

Segmenta ſphæræ hic reputantur non quælibet portiones, ſed illæ tantum, cùm Sphæra ab vno plano tota ſecatur in partes duas, ſic vt quælibet pars habeat ſuum polum; Talis enim ſectio efficit, vt baſis ſegmentorum ſit circulus planus.

Centro A ſit ſuperficies Sphæræ BDCL, & hic ſit eius circulus maximus, & aſſumantur extrema diametri DAL pro polis ſegmentorum futurorum, ſintq; D. L. & per punctum I, perq; AE centrum, tranſeant duæ perpendiculares HIK, & BAD, repræſentantes ſectiones, ſeu circulos ad planum DBL rectos. Sicut igitur tota DL ſubtenſa dimidio circuli LCDB à polo D ad L imum, (quod punctum jam in comparatione totius Sphæræ cum ſuis ſegmentis ſuſtinet vicem baſis) ſit ſemidiameter circuli plani, æqualis toti curvæ ſuperficiei ſphæræ, per VI: Sic etiam DC ſubtenſa ipſi DKC dimidio arcui ſegmenti BCD a polo D ad ad baſin C, ſit ſemidiameter circuli plani, æqualis curvæ ſuperficiei ſegmenti ſeu hemiſphærij BDC, per V: Sic etiam in genere quocunq; ſegmento ſumpto, vt HKD, linea DK ſubtenſa latitudini ſegmenti a D polo ad baſin K, ſit ſemidiameter circuli plani, æquantis ſuperficiem curvam ſegmenti KDH: Et ſumpto ſegmento HKL, cuius polus L, baſis circularis HK, ſubtenſa KL, ſit ſemidiameter circuli plani, qui æqualis ſit ſuperficiei curvæ ſegmenti KLH.



Demonſtrationem vide apud Archimedem. Primam verò fidem tibi faciet analogia. Nam cum ſic ſit comparatum cum tota ſuperficie & cum dimidia: probabile eſt, eandem rationem obtinere etiam in ſegmentis cæteris.



Corollarium.

Segmenta ſegmentorum, quæ quidem vtrinq; circularibus baſibus terminantur, iiſdem principijs facile in planum explicantur. Nam ſit BHKC ſegmentum ſegmenti BDC, cuius baſes circuli HK, BC. primò ſit circulus æqualis ſegmento ſphæræ maiori BCD Deinde alius circulus ſit æqualis complemento ejus quod proponitur ſegmentum ſegmenti, Nam complm hoc, eſt ſegmentum ſphæræ minus HKD, ſive polus ejus idem ſit cum priori ſive alius. Ergò circulorum planorum DK, DC differentia æquabit Zonam BHKC.

Alia vero ſegmenta ſegmentorum, quæ non integris circulis planis, ſed eorum partibus terminantur; niſi polus D & axis DI totius ſegmenti HKI fuerit conſtitutus in concurſu ſectionum, nondum habent notum æquationis vel computationis ſuæ methodum.

THEOREMA VIII.

Sphæricum Convexum & ejus axis ſecantur à plano ad axem recto in eadem proportione.

Septimum Theorema ſervit Geometricæ delineationi, hoc octavum arithmeticis eſt vtilius & compendium jucundiſſimum. Illud planum prodit æquale curvæ ſuperficiei; hoc lineas oſtendit æquivalentes ſegmentis.

In Sch. præcedenti, ſi axis totus DL valet ſuperficiem totam DKLH, pars axis DI valet partem ſuperficiei HDK, ſiquidem DI fuerit axis ſectionis, id eſt, ſi fuerit rectus ad planum BK ſecans, idq; ſecet in centro I, Sic pars axis IL valet partem ſuperficiei HLK.

Nam quia HDK eſt ad KLH, vt circulus DK ad circulum KL rectæ, per VII. id eſt quadratum KD ad quadratum KL: At verò quadratum KD eſt ad quadratum KL, vt recta DI ad rectam IL: Ergò etiam vt recta DI ad rectam IL, ſic HDK ſuperficies ad KLH ſuperficiem.

Analogia. Quemadmodum igitur in lineis BA, HI, ineſt proportio circularium circumferentiarum BC, HK, centris A. I. ſcriptarum; ſic in lineis tranſverſis DA, DI, ineſt proportio arearum BDC, HDK, terminatarum ad illos circulos: Et ſicut DI valet aream HDK, & DA aream BDC, ſic IA valet aream Zonæ BHKC.

THEOREMA IX.

Cylindri recti ſuperficies eſt æqualis Sphæricæ, quam ſtringit.

Creatur enim Cylindrica ductu totius circumferentiæ KL (in ſequ: ſchemate) in totam diametrum KN vel GB: at ductu dimidiæ circumferentiæ KL, in dimidiam diametrum AB creatur pars quarta prioris, cum figuræ ſimiles, ſint in dupla proportione laterum: creatur verò eodem ductu area circuli maximi, per II. quæ eſt etiam ſphæricæ ſuperficiei pars quarta, per VI: Duo ergo ejuſdem quadrupla ſunt inter ſe æqualia, ſuperficies ſc. curva Cylindri KML, & ſuperficies curva globi ſeu ſphæræ ſuæ GB, vtraq; quadruplum areæ KL.

4. 6. — 24	
2. 3. — 6.	
1. 2. 4.	

THEOREMA X.

Superficies, globi, & ejus cylindri, qui globũ ſtringit, reſectæ ab eodem plano ad axem recto, ſunt æquales.

In figura ſequenti ſit GB globus, LN ejus cylinder, ſtringens globum in medio, & in GB. Et ſit planum PST ſecans vtramq; ſuperficiem: dico Zonã KPSTL cylindricam, eſſe æqualem curvæ ſuperficiei ſegmenti globi GR.

Videtur falſum eſſe, cum Cylindrica ſit tam laxa, globi verò ſuperficies ſurſum in anguſtum coeat. Sed memineris, quanto illa laxior, tanto hanc eſſe latiorem, cùm ꝑ obliquũ ad eandem tendat altitudinem. Sed facilis eſt demonſtratio. Cùm enim KP, & GR ſint æquales & creetur Zona KRSTL ductu KP vel GR in totam circumferentiam KOL, & ſic etiam Zona PSTMN creetur ductu PN vel RB in eandem circumferentiam totam: ergo vt rectæ GR ad RB, & BG, ſic ſuperficies cylindrica KT, ad TN & NL. At vt rectę GR

ad RB & BG, ſic ſuperficies ſegmenti globi GR ad RB ſegmentum & BG totam globi ſuperficiem, per VIII. Ergo & vt Cylindrica KT ad TN & NL, ſic ſphærica GR ad RB, & BC. Eſt autem tota Cylindrica NL æqualis toti Sphæricæ GB, per IX. Ergo & pars Cylindricæ KOL PST parti Sphæricæ in ſegmento GR erit æqualis.

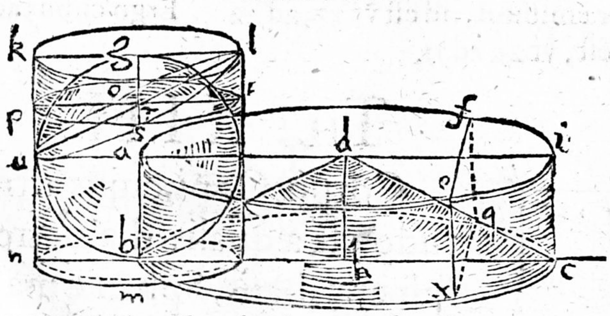
THEOREMA XI.

Corpus Cylindri eſt ad corpus Sphæræ, quam ſtringit, in proportione ſeſquialtera.

Corpus enim Sphæræ ad Analogiam eorum quæ dicta ſunt Theor. II. poteſtate in ſe continet infinitos veluti conos, verticibus in centro ſphæræ coeuntes, baſibus, quarum vicem ſuſtinent puncta, in ſuperficie ſtantibus. Sit igitur in ſchemate II. BG Sphæra, A centrum, coni AB, AG & ſimiles infiniti, iiq; minimi, id eſt, quorum Baſes ſint puncta B. G. vertex omnium communis A. Fiat novum Schema, in quo extendatur curva ſuperficies ſphæræ in planum circulare, cuius diameter ſit BC, dupla ad diametrum Sphæræ BG, quia Circulorum proportio eſt quadrupla per VI. præmiſſum: & fiat circulus ex BC, ex cuius medio puncto H, ſurgat perpendicularis HD æqualis ſemidiametro AB. Sit autem Conus BDC, baſi BC, vertice D: Conus iſte æquale corpus habebit corpori Sphæræ BG. Omnium enim conorum AB, AG, infinitorum in ſphæra, baſes B. G. minimæ, cum ſphærica ſuperficie ipſa in qua inſunt, in planum circulum BC extenſæ & juxta invicem ordinatæ ſunt, & pro eo quod erant in Sphæra Coni recti ABB, AGG, facti ſunt hic coni ſcaleni DCG, DBB, excepto medio DHH, qui manet rectus, habentq; omnes eandem altitudinem DH, & baſes æquales, quippe minimas, omnes igitur & inter ſe & conis rectis in Sphæra æquales ſunt; & totus conus BDC ex omnibus compoſitus, æqualis erit toti ſphæræ BG ex omnibus compoſitæ.

Ductâ igitur areâ circuli BC in ſemidiametrum HD, creatur Cylinder AICB, cuius corpus eſt coni BCD triplum, per IV: Eſt verò cylindri

Schema VIII.



ſphæram ſtringentis duplum, quia baſin BG habet, baſis KL quadruplā, altitudinem verò HD, altitudinis BG dimidiam. Duo enim AICB cylindri invicem impoſiti, efficerent altitudinem æqualem ipſi BG altitudini cylindri KLB, eſſentq; illius quadruplum, propter baſin BG quadruplam baſeos KL: vnus igitur AICB eſt cylindri KLB duplum: erat verò triplum coni BDC, id eſt corporis Sphæræ BG, æqualis cono BDC. Ergo diviſo cylindro AICB in 6: dimidium huius, ſcilicet 3, venit Cylindro KLB; tertia verò pars de 6, ſcilicet 2, venit ſphæræ GB. Cylinder igitur KLB, ad ſphæram ſuam GB, eſt vt 3, ad 2, quæ eſt proportio ſeſquialtera.

 Poteſt

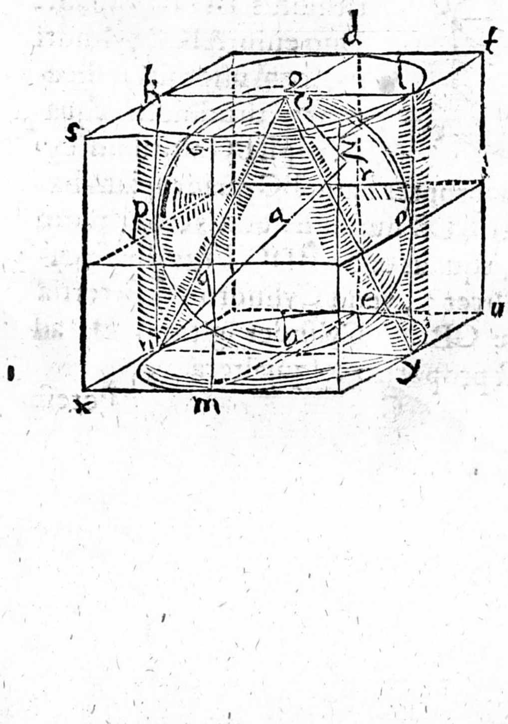
Poteſt idem etiam per IX. probari, ſi fingamus Cylindrum ſecari in infinita priſmata, in axe cylindri coeuntia; pro baſibus verò, quas habent priſmata, quadrangulis, habentia lineas rectas æquales axi; quæ baſes priſmatum omnes juxta invicem ordinentur in curva Cylindri ſuperficie, vt ſupra Theor. II. de circumferentia circuli ſimilia ſumus imaginati. In illo enim Schemate II. ſit circulus BG vtraq; baſis Cylindri: & circumferentia BG, repræſentet curvam Cylindri ſuperficiem, punctum verò A repræſentet axem Cylindri, æqualem ipſi BG diametro, & extendatur curva ſuperficies Cylindri in planum, ſitq; BG, quæ repræſentet rectangulum, cuius longitudo BC, latitudo BG; & connectatur axis Cylindri AA, cum recta CC, ipſi parallela, rectangulo AACC: vt ſit Priſma AABBCC, æquale corpori Cylindri. Erunt enim omnium Cylindri Priſmatum minimorum baſes rectangulæ minimæ (hoc eſt lineæ) juxta invicem ordinatæ in ſuperficie rectangula BC, & Priſmata in Cylindro recta, fient hic ſcalena, omnium tamen acies pertingent ad communis altitudinis BA terminum AA, erunt igitur æquealta & invicem & cum rectis Priſmatibus ipſius cylindri. Ducto igitur rectangulo BBCC in altitudinem BA, creabitur Parallelepipedum, cujus corpus eſt duplum corporis priſmatis AABBCC, duplum igitur corporis cylindri. At ſupra etiam ducebatur circulus æqualis rectangulo BBCC ſuperficiei curvę cylindri (ſc. quadruplus circuli maximi, per VI) in altitudinem æqualem ipſi BA ſemidiametro, & creabatur triplum coni, æqualis Sphæræ. Idem ergo eſt triplum ſphæræ & duplum cylindri: Ergo vt ſupra, Cylindri ad ſphæram proportio eſt ſeſquialtera.

THEOREMA XII.

Cubi corpus ad corpus Sphæræ quam ſtringit, eſt duplum paulo minus, nimirum vt 21. ad 11. proxime.

Nam Cubus STVX, in figura ſequenti, eſt ad Cylindrum ſuum KLN quem ſtringit, vt 14 ad 11 proximè, per III. præmiſſum, id eſt vt 42 ad 33. At Cylinder KLN eſt ad ſphæram PGOB quam communiter cum cubo ſtringit, ut 3. ad 2, per XI. præmiſſum, id eſt vt 33, ad 22. Ergo cubus ad ſphæram eſt vt 42. ad 22, id eſt, vt 21. ad 11.

Schema IX.



TH. XIII.

Corpus Coni, cujus altitudo eſt æqualis diametro ſphæræ, baſis, Sphæræ maximus circulus, eſt dimidium corporis ſphæræ.

Cylinder enim KLN eadem baſi & altitudine, eſt triplum coni ſui NGI, vel vt 3. ad 1. Idem verò Cylin-

Cylinder eſt ad ſphæram ſuam, vt 3 ad 2, per XI. præmiſſum: Ergo Conus ad Sphæram eſt vt 1. ad 2.

Summa præmiſſorum.

	Conus Cylindri NGY. KLYN		Sphæra Cylindri PGOB KLYN		Cylinder KLYN		Cubus STVX Cylindrum ſtringens in KN, CM, LY, & DE. Sphæram vero in G.O.B.P.Q.R.
Eſt vt	11.	———	22	———	33	———	42
Vel vt	1	———	2	———	3	———	4 minus

Corollarium.

Porrò indidem etiam patet, Conum priorem in Hemiſphærio (vt Theor. V. Conum BDC) eſſe ad Cylindrum qui ſphæram ſtringit, vt Octaedron in ſphæra ad Cubum circa ſphæram, ſextam ſcilicet partem Cylindri, quartam ſphæræ, & ſic dimidium Hemiſphærij ſui, dimidiumq; coni Theor. XIII. deſcripti, quippe cujus baſin habet integram, altitudinis verò ſaltem dimidium.

Ille verò conus major EFG, in quo eſt Hemiſphærium (Theor. V.) corpus habet irrationale ſeu ineffabile. Similes enim Coni, vt EFG, & BDC ſunt in tripla proportione altitudinum AG, & AD. Eſt autem proportio AG ad AD ſemidupla: ergo proportio conorum eſt triplex ſemidupla, hoc eſt, ſeſquidupla. At ſeſquiduplæ termino vno pronunciato (quod ſcilicet conus BDC dimidium Hemiſphærij BGD dicitur) terminus alter fit ineffabilis, niſi de propinquo.

Epiſagma I.

Eadem eſt etiam proportio corporis ab Ellipſi generati, quod Sphæroides dicitur, ad conum æquealtum. Arch. Sphæroid. prop. XXIX. XXX.

Epiſagma II.

Sicut ſphæroides eſt coni ſui duplum: ſic Conoides Parabolicum eſt coni ſui ſeſquialterum. Vide in eodem libro prop. XXIII. XXIV.

Conoides verò Hyperbolicum (qualis eſt ferè figura hulceris, montis, aut acervi frugum ordinati) ſeſquialteram proportionem magis ad æqualitatem adducit. Nam ad lineas ſeſquialteram proportionem continentes (quæ habent duplum & triplum eius quæ inter verticem & centrum figuræ) addit vtrinq; diametrum.

THEOREMA XIV.

Segmento ſphæræ æqualis eſt conus ſuper eadem baſi, habens altitudinem tanto majorem, vt ſit ejus exceſſus ad ſemidiametrum Globi, ſicut eſt altitudo ipſa ſegmenti ad reſiduum diametri.

 Sit

Sit ſphæra CLB, ejuſq; ſegmenta duo HKD & HKL, eorumq; axes DI, IL, partes diametri per A centrum ductæ, quæ continuetur à D verſus O.P. Quæritur conus æqualis ſegmento minori, HKD. cuius axis DI, reſiduumq; diametri IL. Fac ergò vt IL ad LA, ſic ID ad DO: erit IO altitudo, & HK baſis, coni, cujus corpus eſt æquale corpori ſegmenti HKD minoris. Sit deinde ſegmentum HKL, ejus axis LI, reſiduumq; diametri ID. Fac iterum vt ID ad DA, ſic IL ad LP: erit IP altitudo, & HK baſis coni, qui æqualis eſt ſegmento HKL maiori.

Demonſtratio non eſt popularis, ideò petat illam, qui vult, ex ſecunda ſecundi libri Archimedis de ſphæra & cylindro: non eſt enim mihi conſilium, totum Archimedem hic tranſcribere. Veritas autem ejus circa Hemiſphærium ſic patet; ſit Hemiſphærium BCD, cujus axis AD, reſiduum Diametri AL. Quod ſi facio vt reſiduum diametri AL ad ſemidiametrum LA, ſic AD axem, ad DQ, facio igitur DQ æqualem ipſi DA, & altitudo AQ erit dupla ad altitudinem ſegmenti AD. Conum igitur qui habet baſin BL, altitudinem diametri DL, pono eſſe æqualem Hemiſphærio. Id autem verum eſſe, priori Theoremate vidiſti, vbi conus iſte erat dimidium ſphæræ.

Archimedes etiam comparat proportionem ſegmentorum ſolidorum, cum proportione ſegmentorum ſuperficiei, demonſtrans ſolidorum proportionem eſſe minorem dupla proportione ſuperficierum, maiorem ſeſquialterâ. Conſtituitur autem proportio dupla in numeris, ducto vtroq; proportionis termino in ſeipſum; ſeſquialtera verò, ducta eiusdem termini radice in terminum ipſum. Vt ſi ſuperficies eſſent inter ſe ſegmentorum, vt 4. ad 9. quadrati numeri; corpora ſub illis ſuperficiebus tecta, eſſent inter ſe propiora quam 16. & 81. ducto vtroq; quadrato in ſeipſum; remotiora quàm 8. à 27. (ductis quadratorum radicibus 2. & 3. in ipſos quadratos) vel 16. à 54. Itaq; ſi minus ſegmentum ponderaret 16: Majus eſſet inter 54 & 81 pondo.

Corollarium.

Proportio binorum globi ſegmentorum inter ſe, cauſa corpulentiæ, in vna qualibet ſectione, eſt expreſſa in altitudinibus conorum, ſcilicet in IO, IP; ſicut prius proportio ſuperficierum ſegmentorum erat expreſſa in ID, IL. Sed diſcrimen magnum eſt, quod globi totius corpus in vna qualibet ſectione repreſentatur à peculari linea OP: at ſuperficies tota globi ſemper ab eadem diametro DL repræſentatur.

Epiſagma I.

Multa hic ſunt communia globo & ſphæroidi atq; conoidibus. Nam vt ſectio globi, facta plano ſemper eſt circulus; ſic ſectio ſphæroidis non omnis, ſed quæ fit plano axi parallelo, eſt Ellipſis, ſphæroidi ſimilis: Ellipſes verò diverſarum & diſſimilium ſpecierum, aut circuli fiunt, quoties vel ſphæroides vt cumq;, vel conoides per vtrumq; oppoſitorum laterū ſecatur.

Arch. Sphær. XII. XIII. XIIII. XV.

Epiſagma

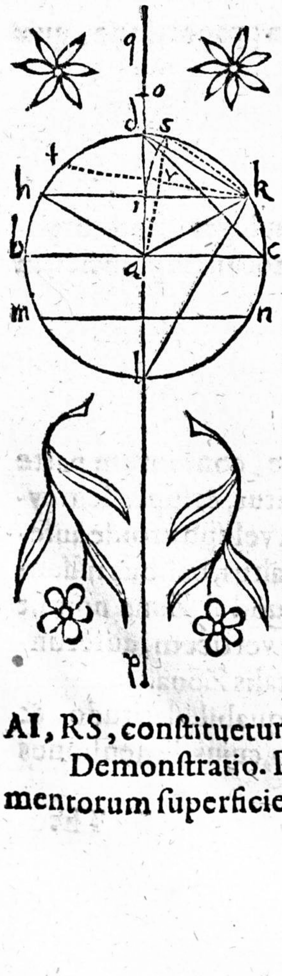
Epiſagma II.

Segmentorum ſphæroidis ratio eadem eſt, quæ ſegmentorum globi, ſi recta ſit ſectio ad axem: ſin obliqua, tunc vſurpatur non dimidium axis, ſed dimidium eius quæ vertices portionum factarum (id eſt puncta earum ſuper ſectionem altiſſima) conjungit. Nam in Ellipſi quæ gignit ſphæroides, axis quidem eſt inter diametros, diametrorum verò multæ ſunt, diverſæ longitudinis, quilibet binos oppoſitos vertices conjungens.

TH. XV. Problema.

Quemadmodum ſuperficiebus curvis ſegmentorum, theorema VII. fecit æquales circulos planos, Theorema vero VIII, æquevalentes lineas rectas oſtendit, comparabiles inter ſe diverſarum ſectionum: ſic etiam ſoliditati ſegmentorum aſſignare poſſumus non tantum Conos æquales vt Th. XIV, ſed etiam plana æquiualentia, ſeu proportionis ejuſdem, & comparabilia inter ſe diverſarum ſectionum: quam demonſtrationem, licet difficilioris captus, addo, quia à Geometris prioribus tentata non eſt.

Quæruntur tria plana quæ habeant inter ſe proportionem eam quam duo ſegmenta Globi inter ſe & ad totum.



Sint ſegmenta HKD, HLD. Ergo centro H vel K, termino ſegmenti in plano circuli HDK, diſtantia HI vel KI, ſcribatur arcus circuli IS, ſecans HDK in S, & ab S, per A, ducatur diameter, eumq; ad rectos ſecet recta ex K, quæ ſit KT, ſectio R. Hoc facto fiant rectangula tria, primum ſub AD ſemidiametro & DL altitudine ſeu diametro globi totius, quod repræſentet ſoliditatem totius globi: ſecundum ſub AD ſemidiametro & DI altitudine ſegmenti, quod repræſentabit ſoliditatem ſectoris ſphæræ HAKD: tertium ex AI (altitudine coni HKA) in RS, quod dico repræſentare in eadem proportione conum HIKA ſolidum: itaq; ſicut conus HIKA ablatus à ſectore HAKD, relinquit ſegmentum HIKD; ſic etiam tertium rectangulum ablatum à ſecundo, relinquet planum æquevalens in eadem proportione ſegmento ſphæræ HIKD.

Quod ſi ſegmentum ſit maius Hemiſphærio ſc. HKL; pro DI, ſumenda eſt IL, in ſecundi rectanguli formatione, & ad id eſt addendum rectangulum ſub AI, RS, conſtituetur q; planum æquevalens ſegmento HIKL maiori.

Demonſtratio. Primùm inter lineas DI, IL, & DL, eſt proportio ſegmentorum ſuperficiei & totius, per VIII. Ergo etiam inter rectangula, ductis

ductis his lineis in eandem ſemidiametrum AD, erit eadem proportio:ſed ſectorum HAKD, HAKL, & globi totius eſt eadem inter ſe mutuò proportio, quæ ſuperficierum HDK, KLH, & totius. Ergo & inter facta rectangula eſt proportio ſectorum HAKD, & HAKL. Deinde AD altitudo ducta in baſin circularem, æqualem ſuperficiei ſegmenti HDK, cuius ſemidiameter KD per VII,) creat Cylindrum, triplum coni æqualis ſectori HDKC; & AI altitudo ducta in baſin HK circularem, cuius ſemidiameter KI, creat itidem triplum coni HIKA. At vt circulus radio KD, ad circulum radio KI vel KS; ſic etiam quadratum KD ad quadratum KS: vt verò quadratum KD ad quadratum KS, ſic DI recta ad SR, per VII. Ergo proportio baſium circularium, per KD & RS deſcriptarum, eſt etiam proportio linearum DI, SR. Sed proportio conorum eſt compoſita ex proportione altitudinum & proportione baſium; vt habet Archimedes, XI. Sphæroideon. Ergo proportio HDKA, ſectoris & HIKA, coni in eo, eſt compoſita ex proportione AD ad AI, & DI ad SR. Eſt autem etiam rectangulorum proportio compoſita ex proportione laterum correſpondentium. Quare proportio HDKA ſectoris, & HIKA coni in eo, eſt eadem, quæ rectangulorum ſub AD, DI, & ſub AI, SR. Ac proinde ipſa ſunt ad mutuam eorum differentiam, vt ſector HDKA & conus in eo HIKA, ad mutuam eorum differentiam, ſcilicet ad HIKA ſegmentum. Hæc methodus concernit potiſſimùm conum HIKA, qui eſt communis differentia, qua ſegmenta differunt à ſuis ſectoribus, quem conum interdum operæprecium eſt notum habere.

Epiſagma comparativum.

Sic ſegmenta Conoidis parabolici ſunt inter ſe in proportione, quæ eſt inter quadrata axium. Arch. ſphæroid. XXVI.

Corollarium I.

Segmenta ſegmentorum Sphæræ eaſdem habent leges quod corpora attinet, quæ ſupra fuerunt ejuſdem generis ſegmentorum ſuperficiei, in corollario ad VII.

Corollarium II.

Zona ſphæræ & ſphæroidis, ſeu corpus annulare, contentum parte ſuperficiei ſphæræ vel ſphæroidis mediâ, quæ Zona dicitur, & ſuperficie cylindrica intus, hæc inquam ſic inveſtigatur. A ſphæra vel ſphæroide auferuntur bina ſegmenta æqualia, & Cylinder Zonæ æquealtus, baſibus iiſdem cum ſegmentis ablatis; remanetq; corpus Zonæ. Quod ſi Zona non ſit media globi vel ſphæroidis, ſed inclinata ad polum ſeu verticem, auferuntur ſegmenta inæqualia, & truncus coni, vt remaneat talis Zona.

In telligitur autem Zona, cui circumcirca ſit æquabilis latitudo, & ſub qua ſit tectus Truncus conicus parallelarum baſium, cujus dimenſiones jam in proximo theoremate ſequentur.

Theo-

THEOREMA XVI.

Conus ſecatur variè: aut enim per verticem & baſin, & id vel plano, vel ſuperficie alia coni minoris, habentis eundem verticem.

In vtroq; caſu ſegmenta Coni æquealta, ſunt vt eorum Baſes inter ſe.

Nam Conus eſt hîc veluti circulus corporatus; idem igitur à ſectione patitur, quod circulus ſuæ baſeos.

Aut ſecatur Conus plano parallelo lateris, cuius circumductu Conus eſt creatus; aut neq; parallelo, ſed ſupra verticem extra figuram concurſuro cum latere: vtroq; caſu fiunt portiones indefinitæ, de quarum ſoliditate nulla dum diſquiſitio facta fuit à Geometris, vſu quippe non exigente.

Aut ſecatur Conus plano per latus vtrumq; ; fiuntq; partes duæ, Verticalis ſuperior, & Truncus inferior. Verticalem, plano ad axem obliquo, Archimedes portionem Coni maluit appellare; agnoſcens Conos non alios quam æquicruros: Apollonius vero Conos faciens alios æquicruros, alios ſcalenos (cujus exemplum in Schemate IV.) talem portionem, quantumvis axe per obliquum ſecto, dummodò ſectio ſit circulus, pro Cono & ipſam agnoſcit.

Quod attinet ſegmentum verticale, ejus ſectio fit Ellipſis, quæ habet centrum ſuum extra axem, verſus latus Coni longius. In Schemate IX. Coni GYN axis eſt GAB, cujus ſegmentum verticale GNA, baſin habet Ellipſin, quæ repræſentatur per lineam NZ, cujus centrum ſeu medium, vbi latiſſima, eſt infra A, ſectionem ejus cum axe, verſus N.

Atq; hoc eſt ſemper majus ſegmento recto illo, in quo planum ad baſin NY parallelum per terminum axis, ab Ellipſi ſecti tranſit, ſc. per A. Nam planum ſecans, in A fixum, & ad axem GA inclinatum, plus de corpore Coni acquirit parte AN, quàm amittit parte AZ.

An autem huic ſegmento GNA æqualis ſit Conus ille, cujus baſis, baſi NY parallela, per centrum Ellipſis infra A tranſit; id conſideratione dignum eſt: mihi nondum liquet, nec jam vacat. Vide de hoc infra Th. ſequenti aliqua.

Interim in genere de omni ſegmento verticali verum eſt Th. XI. Sphæroid. Archimedis; ſecundum quod Coni, ſegmentive Verticalis, ad Conum proportio, componitur ex proportionibus Baſium inter ſe, & Altitudinum inter ſe.

Ergo area Ellipſis NA, ad aream circuli NY eſt proportionis ſolidorum GNA, ad GNY pars vna. Ineſt autem harum arearum proportio (per Epiſ. II. ad Th. II.) in rectangulo diametrorum Ellipſis & quadrato NY, tanquam notioribus. Pars altera proportionis corporum eſt inter GZ altitudinem ſegmenti GNA ſuper plano NAZ, & GB altitudinem coni NGY ſuper plano NY. Multiplicatis igitur in ſe mutuò terminis proportionum ZG in GB, & rectangulo diametrorum Ellipſis NA, in quadratum NY; vt poſterior factus ad priorem, ſic eſt corpus coni NGY ad corpus

ſegmenti GNA. Poteſt etiam quodq; ſeorſim computari; vt GNA, ducta altitudine GZ in planum Ellipſis NA, prodit triplum corporis GNA.

In ſpecie ſi planum ſecans parallelum fuerit baſi Ny: proportio corporum, ſegmenti & totius, erit triplicata altitudinum vel radiorum in baſibus circularibus, vel ſeſcuplicata planorum.

Nimirum quia hoc pacto ſegmentum verticale, & conus totus fiunt ſolida ſimilia. Multiplicatis igitur cubice ſingulis ſeorſim vel altitudinibus vel radijs baſium, erit vt numerus cubicus major ad minorem, ſic Conus totus ad ſegmentum. Aut ſi ſola plana baſeon nota eſſent, quæruntur illorum radices, multiplicanturq; in illa.

Quod Truncos attinet, facilis eſt ex dictis, illos inquirendi Methodus. Ex vno enim modorum præmiſſorum computatur & conus veluti totus, & ſegmentum verticale deficiens, ex data vel altitudine vel baſis radio. Quod ſi neſcitur ejus, vt deficientis, altitudo, ſi quidem eâ fuerit opus, quæritur ex comparatione baſium Trunci cum altitudine; vt enim differentia Radiorum in baſibus, ad altitudinem (ſi Truncus ſub planis perpendicularibus fuerit) ſic radius baſis minoris ad alitudinem ſegmenti deficientis; ablato igitur corpore ſegmenti deficientis à Cono toto, relinquitur corpus Trunci quæſitum.

In his verò Truncis, qui ſub parallelis baſibus continentur, rurſum eſt brevior methodus vt prius. Nam quia baſes talium Truncorum ignorari non poſſunt, earum diametri (quælibet in ſeipſam) multiplicantur cubicè, & ablato cubo minori à majori; erit vt maximus ad differentiam, ita Conus totus ad Truncum.

CLAVIVS alium docet modum, ingenioſiorem quidem, ſed & difficiliorem, vt mihi videtur. Non minus enim quàm ſuprà, computanda eſt area baſis vtriuſq;; & jam hoc inſuper accedit, quod quærenda eſt area medio loco proportionalis inter planum vtriuſq; baſis. Id autem fit vel multiplicatione & diviſione numerorum prolixorum; vel duabus extractionibus radicum, earumq; multiplicatione: tunc addenda omnia tria plana, & ſumma in altitudinem Trunci multiplicanda. Atqui ex radijs circulorum qui requiruntur ad inveſtigationem arearum, multò faciliori negocio poteſt haberi, quicquid quæritur.

Cùm autem Truncorum Conicorum, qui fiunt plano ad axem recto, multiplex ſit vſus, & præſenti materiæ cum primis neceſſarius, ob doliorum figuram; ſubjungam hic pulcherrimum Theorema, & compendium exoptatiſſimum; etſi demonſtrationem cognationis cauſâ differo deorſum in Supplementum Archimedeæ Stereometriæ, & Th. XXII. Dividitur autem Truncus in medium Cylindrum & circumjectam ei conicam veluti Tunicam, qui ſegmentum eſt Coni diſſimile ſuperiorum, ſc. ſuperficie Cylindricâ factum: Ergo ſi tres Diametri, duæ baſis minoris, una majoris, extendantur in vnam rectam: erit ut rectangulũ ſub tota & ſub differentia baſium, ad triplum quadrati baſis majoris uel minoris, ita corpus Tunicæ ad corpus Cylindri vel majoris uel minoris.

Ergo

Ergo duplum minoris adde maiori, ſummam duc in differentiam maioris & minoris, pro Tunica: deinde minorem quadra, quadrati triplum ſume pro Cylindro inſcripto; ſummam & huius & illius pro toto Trunco.

Vt ſi ſint baſium diametri 3. 5. differentia 2. ad bis 3. adde 5 fiunt 11, quæ duc in 2, fiunt 22 pro tunica, Et quadratum de 3. eſt 9, cujus triplum 27, eſt pro Cylindro: Ergo 49 pro Trunco, in quacunq; proportione altitudinis. Sed hæc per ſequens Theorema, ejusq; Corollarium fient adhuc compendioſiora.

THEOREMA XVII.

Segmenta Cylindri recta, parallelis axi ſuperficiebus reſciſſa, ſunt inter ſe, vt ſegmenta baſis.

Nam Cylinder eſt hic veluti circulus aut Ellipſis corporata; quare hic idem illi accidit, quod figuris hiſce in baſi, in ſectione eadem. In Schemate VIII. planum EFQX eſt parallelum axi DH. Ergo vt portio circuli EFI vel XQC, ad portionem EFA vel XQB: ſic portio Cylindri EFIXV ad portionem EFABX. Vide Coroll. Th. II.

Segmenta vero, plano per axem tranſeunte, dummodo non ſecet alteram baſium, ſunt vt ſegmenta axis inter ſe.

Nam Cylinder rectus, ſectus plano ad axem recto, eſt veluti linea corporata, & quidem cylindrico corpore prædita: quare accidit illi idem quod lineæ Alia verò ſegmenta per axem, æqualia ſunt Cylindris eâdem axis longitudine. Nam quantum ex vno latere Cylindri deficit ſegmento, quo minus ſit rectum; tantum ei accedit ab altera parte; quod in ſectione coni non fit, ob inæqualem eius craſſitiem. In Schemate VIII, plana PST rectum, LSV obliquum ad axem GB, ſecant illum communiter in R: vt igitur GR ad RB, ſic non tantum portiones rectæ KT ad TN, ſed etiam obliquæ LVK ad VNL. Quantum enim ipſi LVK deficit à partibus L, ſcilicet LRT, tantum ei ſupereſt ex partibus V, ſcilicet VRP, ſimile ipſi LRT.

Segmentum ſegmenti Cylindracei, quale cernitur in Schemate XIV. ſecuturo, literis GST, contentum ſcilicet tribus ſuperficiebus, ſemicirculo GT, ſemiellipſi GS planis, & curva Cylindricâ VTS; ſic, vt ſectionis planorum linea perpendiculariter incidat in G punctum axis HF; hoc inquam ſegmentum habet ſe ad totum Cylindrum TY æquealtum, vt 7. ad 33. vel 14. ad 66. ferè, ad ſegmentum verò HGS reſiduum ad ſemicylindrum HGTS, (plano ſcilicet per axem HG ducto reſciſſum) vt 14. ad 19. Nam infra in ſupplemento Archimedæo demonſtrabitur hoc de vna ſpecie Cylindri, quando ſcil. eius altitudo æquat circumferentiam baſis, Theor. XIX. XX. XXI. At cùm non tantum totus globus ſit æqualis toti ſemi-cylindro, & totum ſtrictum toti ſegmento Cylindri, vbi vertices ellipſis ſectricis tangunt baſes: ſed etiam

 partes

partes globi & ſtricti æquales, ſecundum aliquotam circumferentiæ partem quibus ſunt proportionales, ſint æquales partibus ſegmentorum ſemicylindri & Cylindri dictorum, ſecundum eandem quotam altitudinis, vi ejuſdem explicationis corporum rotundorum in rectum; ſequitur vt & ſegmenta iſta ſegmentorum, quorum vnius baſis eſt circulus, alterius ſemicirculus, ſint altitudinibus ſuis proportionalia, & ſic inter ſe in omni altitudine retineant proportionem eandem quæ eſt totorum, ſc. 7. ad 33. Quibus vero baſes non ſunt circulus & ſemicirculus, ſed alia circuli ſegmenta, illa miſcent proportionem baſium huic proportioni 7. ad 33. Itaq; etiam de his cylindraceorum ſegmentorum ſegmentis valet axioma, non minus quam de conis & pyramidibus, quod quæ inſiſtant eidem baſi, ſint inter ſe vt altitudines.

Deniq; Cylindri per aliam ſuperficiem cylindricam eodem axe ſecti limbus exterior, dividitur à ſuperficie conica, cuius ſunt baſes, infera circulus amplior, ſupera anguſtior, in duo novæ ſpeciei ſegmenta circularia, quorum interius Th. priore Tunicam appellavimus, puta cylindri anguſtioris.

Horum igitur Limbi ſegmentorum proportio inter ſe eſt, quæ duarum medietatum Arithmeticarum, quæ conſtituuntur inter diametrum minorem & diametrum maiorem.

Diviſo enim numero, puta diametri majoris, in partes duas, in diametrum minorem & in exceſſum, factisq; quadratis, tam à minore, quam à majore, majus quidem quadratum continebit partes quatuor, I. quadratum minoris, II. quadratum differentiæ, & III. IV. rectangula duo ſub minore & differentia. Triplicatis deinde quadratis, exiſtent pro majoris triplo, tria minoris, tria differentiæ, & ſex rectangula. Et hæc tria quadrata differentiæ cum ſex rectangulis ſunt differentia tota quadratorum triplicatorum. Quare vt quadrata ad ſuos circulos, adq; cylindros æque altos, ſic hæc differentia ad limbum cylindricum totum. Atqui Th. antecedenti differentiam juſſi ſumus multiplicare in vnam majorem & duas minores, id eſt, in ſeipſam & in tres minores, pro parte limbi interiore, quæ Tunica fuit indigetata. Ablato igitur quadrato differentię vno & tribus rectangulis, à quadratis tribus & ſex rectangulis, reſtant quadrata differentiæ duo & tria rectangula, pro reliquo limbi. Eſt autem trium rectangulorum & vnius quadrati, ad tria rectangula & duo quadrata proportio eadem, quæ trium minorum cum vna differentia ad tres minores cum duabus differentijs, eademq; quæ vnius minoris cum parte tertia differentiæ ad vnam minorem cum duabus tertijs differentiæ. At ſi ad minorem addis primo partem vnam, pòſt partes duas differentiæ, conſtituis duo media arithmetica inter minorem & majorem. Atq; id eſt quod propoſueramus.

Corolla-

Corollarium I & Praxis.

Hinc facile habetur proportio Trunci conici ad Cylindros, Trunco inſcriptum & circumſcriptum. Inter diametros conſtitue duo media arithmetica, & multiplica differentiam totam diametrorum in horum minus pro Tunica, quam indue Cylindro minori, hoc eſt adde quadrato ejus diametri, pro Trunco. Ecce exemplum.

Sint diametri 3. 5, Differentia 2. quæ non communicat cum ternario
Ergo ſubſtitue triplos 9. 15 Differentia 6. Quia eadem manet proportio.

Ergo diameter minor	Duo media Arithmetica	Diameter maior	Cyl. minor 81
9.	11. 13.	15	Tunica 66
9	Dif. 6. 6	15	Truncus 147
81.	66. 78.	225	Reſiduum limbi 78
Pro Cylindro inſcripto	Pro tunica / Pro reſiduo Limbi	Pro Cylindro circumſcripto.	Cyl. maior 225.

Aliud Exemplum			
Dia-			metri
5.	7.	9.	11
5.	6.		
Cyl. 25. Tun. 42 — Truncus. 67			

Aliud exemplum			
Dia-			metri
19.	20.	21.	22
19	3		
Cyl. 361. Tun. 60 — Truncus 421			

Vel quod eodem recidit,

Multiplica diametros inter ſe, multiplica etiam differentiam in ſui partem tertiam, & adde factos; provenit Truncus in ea dimenſione, vt cujuſlibet diametri quadratum valet ſuum Cylindrum. En ſuperiora tria Exempla

9	6	9	5	6	5	19	3	19
15	2	9	11	2	5	22	·1	19
135	12	81 Cyl.	55	12	25 Cyl.	418	3	361 Cyl.
12		minor	12		minor	3		minor.
147 Truncus			67. Truncus			421. Truncus.		

Corollarium II.

Segmenta limbi cylindri maioris circa minorem, ſuperficie conicâ facta, ſtantia ſuper eâdem baſi, non minus quam cylindri ipſi, adeóq; & Trunci toti ſub ijſdem baſibus circularibus parallelis, ſunt in proportione ſuarum altitudinum.

Etſi verò ſuperior baſis non fuerit inferiori parallela, nec circulus, ſed Ellipſis ad axem obliqua: nihilominus bina limbi ſegmenta, exterius & interius, ſunt in proportione illarum altitudinum, quas habet Ellipſeos centrum & diameter minor, eademq; diameter cylindricæ baſeos rectæ. Itaq; non de nihilo eſt, quod Th. præcedenti, portionibus conicis, obliquo ad axem plano reſectis, quæſivi methodum dimenſionis à diametro Ellipſis longiore. Etſi ſuperficies talem limbum inæquabilis altitudinis diſpeſcens, non eſt Coni recti, cui ſit idem axis cum Cylindris, ſed coni ſcaleni.

Apoſtrophe ad Patronos.

CVM LIBELLVS iſte manuſcriptus per menſes ſedecim apud librarium AUguſtanum delituiſſet, commendatus illi ab eximio illo Germaniæ noſtræ decore, meiq; dum viveret, amantiſſimo Marco VVelſero; neq; tamen typis excuderetur, vt erat mihi facta promiſſio: vix tandem, VVelſero jã rebus humanis exempto, libellum meũ extorſi detentori, poſtliminioq; recepi.

Ex eo tempore conſilium cepi, libellum, quamvis in magna operarum penuria, excudendi domi: qua occaſione poteſtas mihi facta fuit, non correctiorem tantum, ſed & auctiorem, quam erat initio conſcriptus, extrudendi. Nec diffiteor, temporis aliquantũ ſubtractum ſtudijs cæteris, impenſumq; huic ſpeculationi; nec pœnitet jacturæ. Nam fieri nequaquam poteſt, vt immortalitatis fructum metat labor, qui ſementem temporis fecit nullam.

Et cenſuiſti Tu quidem, Ill^{ris} & G^{se} L. B. IÖRGERE; quæ de figuris ab Ar-

chimede non tactis, ad rationes tamen doliorum propriiſſimè pertinentibus, affecta tantum audiebas, vti nequaquã omitterentur, quin potius operi ſubjungerentur, appendicis loco.

Ego verò & perfeci potiſſimam eorum partem; vt quod demonſtrationes attinet, parum, quod vſum, nihil ad perfectionem ſuperſit: & tractatum in ipſum libellum hic inſerui ſuo loco, cumq; partibus cæteris ita connexui, vt non appendix cauda, ſed caput aut cor ſpeculationis totius, vt eſt quidem, videri poſſit: quod & Te, L. B. IÖRGERE, & multò maximè Te, ILLVSTRISSIME DOMINE DE LIECHTENSTEIN (cujus in hac Philoſophiæ parte exercitationes aſſiduas, facultatemq; comparatam egregiam judicandi, ex quo Te primùm in præfatione libri ſum allocutus, multò nunc rectiùs & copioſiùs habeo cognitam & perſpectam) vbi tempus ad iſthæc cognoſcenda vacaverit, ipſos cenſituros exiſtimo. Valete & fruimini. Id. Iulijs Anno 1615.

Sup-

Supplementum ad Archimedem.
DE STEREOMETRIA FIGVRARVM CONOIDIBVS ET SPHÆroidibus proxime ſuccedentium.

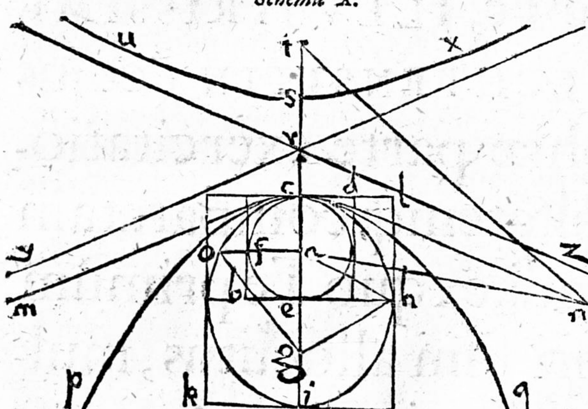
Huc uſq; Archimedes & Geometræ veteres progreſſi ſunt, inquirentes Naturam & Dimenſiones figurarum ordinatarum rectilinearum & curvilinearum, quæq; ab ijs ſolida proximo gradu gignuntur.

Cæterùm quia figura Dolij longius à Regularibus excurrit, operæ precium me facturum putavi, ſi geneſin illius & cognatarum, graduſq; cognationis earum cum Regularibus, eâdem quaſi Tabella comprehenſa ob oculos exhiberem, cùm vt demonſtrationes ſecuturæ plus lucis haberent: tum verò etiam, vt induſtriam Geometrarum hujus ætatis excitarem, portiſq; ſpacioſiſſimi agri Geometrici panſis, quæ ad huc in eo excolenda, quę indaganda reſtent, præconio meo promulgarem.

DE SECTIONIBVS CONI, ſolidorum genitricibus.

Sectiones Conicæ curuæ ſuperficiei, quæ uaria ſolida progignunt, hac vice conſideranda, quatuor ſunt curvilineæ; quas hic in Schemate exhibeo inter ſe comparatas. Nam omnis hujuſmodi ſectio aut Circulus eſt CFE, aut Parabole PCQ, aut Hyperbole MCN, aut Ellipſis CHI.

Schema X.



Harum figurarum cauſa ſimplicitatis hic eſt ordo, vt primus ſit circulus, ſequatur Ellipſis, inde Parabole, vltimo loco ſit Hyperbole. Inter has duæ primæ in ſeipſas redeunt, Circulus & Ellipſis: duæ verò poſteriores figuræ, Parabole & Hyperbole ſic ſunt comparatæ, vt in infinitum, ſi continues, excurrant, ſemper quidem ad rectitudinem magis atq; magis accedentes; nunquàm verò eam penitus aſſequentes; & id hoc diſcrimine, quòd brachia Paraboles CP, CQ, vni rectæ GI, adeòq; inter ſe ipſa etiam, magis atq; magis fiunt parallela, quamvis interim infinito intervallo ab invicem diſcedant: brachia verò Hyperboles CM, CN ſequantur ductum duarum Rectarum RY, RZ, concurrentium in R, eoq; verſus Y. Z. in infinitum ab invicem diſcedentium;

quæ

quæ brachijs Hyperboles ſemper approximant magis magisq;, nunquam tamen cum ijs concurrunt; à qua proprietate, Rectæ RY, RZ dicuntur Aſymptoti.

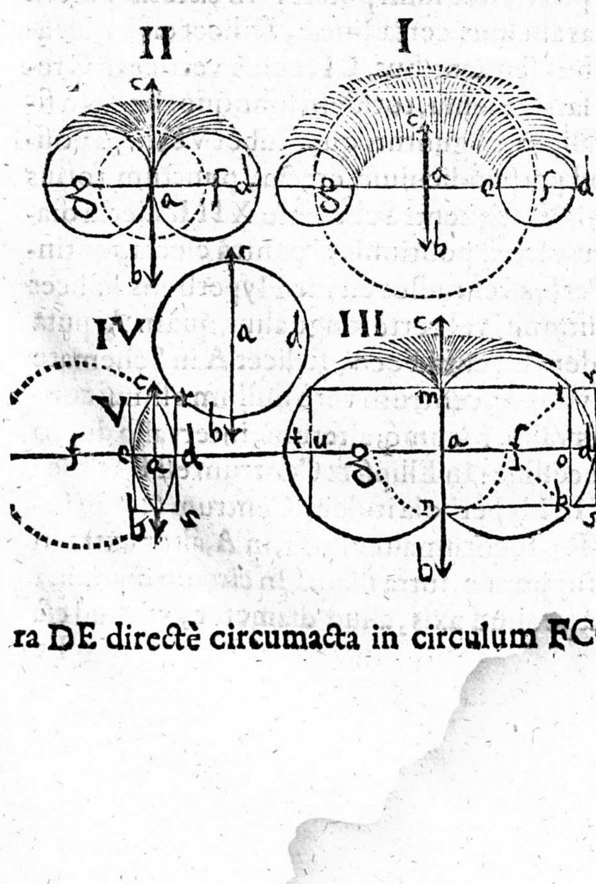
Rurſum ex vtraq; biga eſt vna, quæ ſola ſuam implet ſpeciem, ex finitis quidem circulus, ex infinitis Parabole: Ellipſium verò illinc tot ſunt formæ, quot poſſunt eſſe formæ rectangulorum parallelogrammorum LK: Hyperbolarum hinc formæ tot, quot angulorum YRZ, à binis rectis RY, RZ formatorum. Sanè quia, vt circulus CE ſe habet ad circumſcriptum quadratum vniforme DB, & vt Parabole PCQ, ad Axem ſeu rectam CI vnicam, ſic Ellipſes CI, ſe habent ad Rectangulorum LK, Hyperbolæ MCN ad Concurrentium rectarum YR, ZR, ſpecies infinitas, quælibet ad ſuam.

Et nota propter deſcriptionem figurarum, quod ſicut in circulo omnia intervalla AC, AF, AE, inter ſe ſunt æqualia, ſic in Ellipſi bina ſemper intervalla AC, OG, non à centro E, ſed à duobus Focis A, G, æſtimata, binis quibuscunq; AH, HG, vel AC, CG, vel AI, IG, ſunt æqualia. In Parabola, cujus focus A, ducta quacunq; KI in eodem plano, rectâ ad axem CI, rurſum binæ lineæ AC, CI. binis quibuscunq; alijs vt AO, OK æquales ſunt. In Hyperbola, cuius focus vnus A intus, alter T. exterius, & circa eum figura ſimilis VSX, intervalla bina cuiusq; puncti, ut N, & focorum A, T, ſemper vnam & eandem habent differentiam CS, lineam inter vertices C, & S, &c. Vide plura paulò infra de figurarum ſolidarum numero.

De modis Geneſeos.

Porro ex circumductu circulari quatuor harum planarum figurarum (de alijs enim formis hac vice non loquimur) creantur infinitæ ſolidorum formæ, quarum ſuperficies non, vt Coni & Cylindri, altrinſecus rectilineæ, ſed quaquaverſum curvilineæ ſunt, ſecundum magis tamen & minus.

Schema XI.



Circumactûs autem ſpecies generaliter ſunt quinq;, ſed quę minutius poſtea ſubdividuntur, cùm ad figuras magis compoſitas ventum fuerit. In adjecto Schemate expreſſæ ſunt hæ ſpecies vtcunq;. Nam I. Axis CB, circa quem figura eſt circumagenda, vel longius ſtat à centro F. figuræ ED circumducendæ, quàm vt concurrat cum figura. Tunc figura DE directè circumacta in circulum FCG, cum latitudine ſua erecta, creat

creat Annulum, in quo ſpacium eſt intermedium, cuius centrum A. II. Vel tangit axis iſte geneſeos, vt AB, figuram FD circumagendam; Tangat in A, & manente puncto circumferentiæ A, totus circulus circa CB circumagatur: tunc figuræ gignuntur, quas poſſis Angulos ſtrictos apellare. III Vel ſecat axis geneſeos figuram circumagendam extra medium, vt ſi maius circuli ſegmentum MDN circa ſectionem MN, ſit circumagendum, ita ut centrum F per G tranſeat, gignitur autem figura in duobus locis oppoſitis cava ſcilicet circa M & N, quæ Mali fructus arborei forma eſt. IV. Vel tranſit axis geneſeos per ipſum centrum figuræ, vt ſi ſemicirculus CDB circa manentem diametrum CAB ſit circumagendus; & tunc gignitur Sphæra ſeu globus perfectus. V. Vel deniq; ſecat axis geneſeos figuram circumagendam intra medium, vt ſi reſiduum ſeu minus ſegmentum CDE de circulo MDN, ſit circumagendum circa ſectionem ſuam CAD: & tunc gignitur figura, in locis duobus oppoſitis acuta, quam à Citrij mali figura poſſis denominare.

DE FIGVRARVM NVMERO & differentijs.

Quod ſi tres figuræ reliquæ, ſectione Coni ortæ, tam eſſent ſimplices, quàm circulus, de quo hactenus: figuræ ſolidæ his V. modis procreatæ eſſent in vniverſum Viginti, à qualibet earum, vt hactenus à circulo, quinq;, pro quinq; modis Creationis circularis. Sed propter mixtam reliquarum figurarum Naturam, Vicenarius iſte ſolidorum numerus ad Nonaginta extenditur.

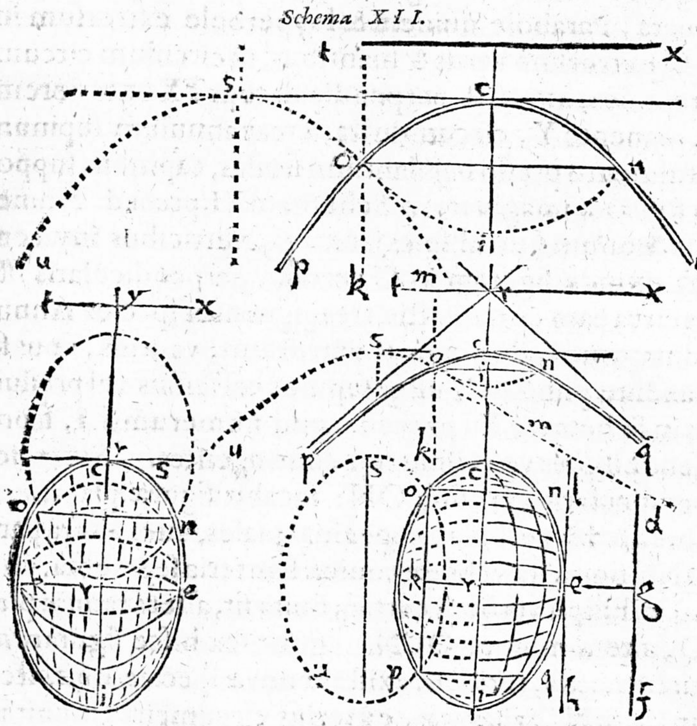
Cûm enim figuræ tres propriè dictæ Conicæ, non ſint vndiq; ſimiles: fit vt quæ reſpectu circuli vnica eſt linea, pro axe geneſeos aſſumpta, reſpectu harum figurarum fiant diverſæ, punctum in Circulo vnicum, diverſa puncta ſint in cæteris. In circulo Vertex vno & eodem modo dicitur, & omne circumferentiæ punctum pro vertice ſumi poteſt: In cæteris Vertex primarius eſt, non niſi extremitas alicuius certæ lineæ, ſcilicet eius quæ axis dicitur, quæ eſt in figuris duabus ſequentibus, CI, cuius vertices à G repræſentantur: contrà Vertices, latiore ſenſu, totidem ſunt, quot lineæ in figura pro axe geneſeos, vel ei parallelis, eliguntur; quos lubet Vertices poſitionis appellare, quia lineâ tali ad perpendiculum erecta, punctum totius figuræ altiſſimum, fit vertex ejus. Vt ſequenti Schemate XIII. electa diametro OS pro axe geneſeos, A fit vertex poſitionis: contrà electa contingente EF in axem geneſeos, Vertex vel nullus eſt, in Hyperbolis ſcilicet obtuſangulis, & certa earum poſitione, vel certè longe alius, quàm A, puta circa O. In circulo Centrum idem eſt cum Foco, ſcilicet A in Schemate X. præmiſſo: In Parabola Focus vnus A, centrum verò nullum eſt; niſi concipias, centrum eius infinito intervallo, focumq; alterum, intervallo duplo majori, in linea CI, à Vertice C, receſſiſſe: In Ellipſi & Centrum eſt E, & foci duo A. G. omnia intra figuram: In Hyperbola itidem Centrum & duo foci; ſed centrum extra figuram in R; focorum alter intra, in A, alter extra in T. qui eſt reſpectu VSX ſectionis oppoſitæ, intra illam. In circulo diametri omnes pro axe ſunt, in cæteris ſæpe aliud axis, aliud diameter, vt aliud eſt ſpecies, aliud genus.

Et

Et in Parabola quidem (vt redeamus ad Schema XIII. ſequens) diametri omnes æquidiſtant, vt CI, OS, HA. in Hyperbola verò atq; Ellipſi omnes per centrum figuræ R traducuntur, quod eſt in Hyperbola extra, in Ellipſi intus in medio. In circulo æquales ſunt omnes diametri; in Ellipſi differunt longitudine, ut CI, OS; in Parabola & Hyperbola non eſt earum finita longitudo. In circulo & Ellipſi omnis lineam tangens habet æquidiſtantem ſibi diametrum, in Parabola & Hyperbola, quæ tangenti cuicunq; æquidiſtat, vt PK ipſi FE, diameter figuræ eſſe non poteſt. Secundum horum igitur punctorum linearumq; differentiam figuræ planæ circumactæ, varias etiam, & re quidem ſemper, plerunq; verò etiam ad oculum differentes ſpecies ſolidorum procreant: quas ſigillatim recenſere non pigebit, non tamen repititis quinq; ſpeciebus ex circulari Coni ſectione ortis, quæ ſingulæ familias ſingulas ducunt jam ſequentium, quaſdam interim communes habent clientelas.

Incipiamus ab iis in quibus deſijt Archimedes, & ſit in Schemate adjecto, axis figuræ CI; circa quem figura PCQ circumagatur, ſic vt ma-

Schema XII.



nente CI, punctum N, per punctum O transeat, Q per P. Creantur igitur ſolida duo Conoidea, Parabolicum & Hy-
perbolicũ, & Sphæ- 1.
roides longum, ſeu 2.
figura Ovi: cuius 3.
vertices C, I; circulus ampliſſimus ERK; de quibꝰ Archimedes libro de Conoidibꝰ & Sphæroidibus. Modus geneſios eſt è Numero IV, idem qui globi. Species ſunt 3. numero linearum.

Sit jam axis geneſeos non ipſe axis figuræ CI. ſed ei parallelus. Erit igitur vel extra figuram, vt in DF, vel contingens eam, vt LH contingens in E: quæ duo in ſola Ellipſi locum habent. Nam in cæteris, omnis linea parallela axi in eodem plano, ſecat figuram continuatam. In Ellipſi igitur, manente DF, & totâ figura NOPQ in diſtantia centri RG circumlata, gignitur annuli ſpecies, quem arduum dixeris: ſimilis eſt ſerto puellarum ru-
ſticarum, quippe ſpacium habet in medio. Sic manente LH & puncto con- 4.
tactus E, tota itidem figura NOPQ circumlata, fit ſolidum ejuſdem no- 5.
minis, ſed ſine ſpacio in medio, hoc eſt annulus ſtrictus. Vtranq; imaginare tibi in Schemate XI. ad Numeros I. II. ſed pro circulis ſectionum intellige Ellipſes erectas.

 Vel

Vel erit intra figuram axis circumductionis; ſit OK, & conſiſtat vel
citra CI axem figuræ, ſic vt axis CI cum portione figuræ majore OCQ cir-
ca OK agatur, & manente O, vertex C per S tranſeat, & Q per V: tunc Pa-
6. rabole & Hyperbole, magis iſta, figuras faciunt QCOSV, montis Ætnæ ſi-
7. miles, propter cavitatem ejus in vertice, quam Græci vocabulo Craterum
8. celebrant: Ellipſis verò figuram hoc pacto creat ſimilem Mali Cotonei,
quam imaginaberis in Sche. XI. præced. apud Numerum II: ſed pro con-
ſertis circulis ſectionis intellige conſertas Ellipſes erectas, vt in Schem. XII.
Conſiſtat etiam dicta OK vltra axem figuræ CI ſibi parallelum, ſic vt PO
minor pars figuræ, quæ axem non habet, circa manentem OK circumagen-
9. da ſit: tunc à Parabola atq; Hyperbola ſpecies quædam naſcuntur Cornuum
10. rectorum MNP, quorum alia ſunt acuta alia obtuſa, vt in pecudibus quan-
11. do primùm coniſcant cornibus. Ellipſis verò dat OQ figuram Olivæ vel
Pruni, ſimilem illi Numero V. Schematis præmiſſi XI.
Iam omiſſo axe CI, ſuccedat ejus perpendicularis in eodem plano,
12. & ſit primùm extra figuram vt TX. Ergo circum TX actæ figuræ, ſolidæ
13. creant annularia ordinata, Parabole quidem & Hyperbole extrorſum in-
finita, brachijs CP, CQ extrorſum verſis & hiantibus, in circulum circum-
14. latis. Ellipſis verò circa talem axis CR perpendicularem TX exteriorem,
intervallo centri RY, manente Y, circumducta, creat annulum ſupinum
ſeu ſeſſilem, ſimilem fulmento preſſo bajulantium ſitulas, capitibus ſuppo-
ſitis. Rurſum hanc figuram imaginare in Schemate XI, preced. Nume-
ro I. ſed pro circulis ſectionum ſint Ellipſes jacentes, verticibus invicem
obverſæ. Contingat exinde figuram in C vertice, perpendicularis iſta
15. axis, ſitq; CS; & figuris circa eam circumactis, tres gignentur ſpecies Annu-
16. lorum ſtrictorum ordinatorum, duo infiniti extrorſum, vt prius, vnus fi-
17. nitus ab Ellipſi CI, manente puncto C, eſtq; ſupinus vel ſeſſilis vel preſſus,
vt prius; imaginandus in Schemate XI præced. apud numerum II, ſi pro
circulis ſectionum eſſent Ellipſes verticibus ſeſe contingentes. Secet de-
niq; figuram iſta perpendicularis axi, ſitq; ON: ſecabit figuræ planitiem
in partes duas, in Parabola & Hyperbola ſemper inæquales, cum altera pars
PONQ infinita ſit, ONC finita, ita vt lineæ conicæ fiant tria ſegmenta, duo
infinita, vnum finitum; in Ellipſi verò licet vtraq; finita ſit, altera tamen ple-
runq; major eſt, NIO, altera minor, OCN. Igitur ſex hiſce figurarum
ſegmentis circa ON circumactis, totidem exiſtent novæ ſpecies, duæ circa
18. medium vtrinq; (ſc. in O, & N) excavatæ, exterius circumcirca infinitæ,
19. quippe à partibus infinitis PONQ, circa ON circumactis, vna quæ eſt ab
Ellipſeos ſegmento maiori, lenticularis, ſupra & infra vmbilici forma. Pro-
20. venit tali forma genus quoddam Melonis ſeſſilis minuti, qui totus editur:
proveniunt tali forma ſuperius etiam boleti aliqui. Hanc in Schemate XI.
præcedenti, Numero III, apud figuram Mali imaginare, ſed pro conſertis
circulis ſectionis intellige conſertas Ellipſes eodem axe, vt in Schemata præ-
ſenti XII. Deniq; minoribus figurarum partibus ONC, tres reliquæ figuræ
21. ſolidæ fiunt, aſpectu ſimiles inter ſe, reipſa diverſæ; Ellipticam quidem
22. OCNL à Pruno craſſo, Parabolicam verò & Hyperbolicam OCNI à Fuſis
23. diſtinctionis cauſâ non ineptè denominaveris. Atq; hæ duæ, præſertim
illa,

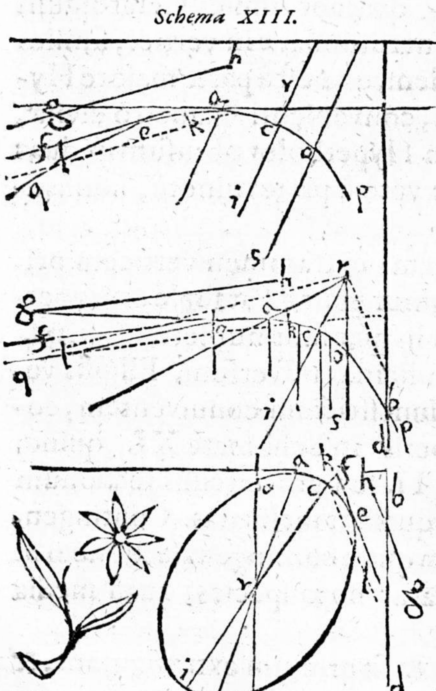
illa, quæ eſt ab Hyperbola multùm obtuſangula, præcipuè ſunt notabiles:
Fiunt enim figuræ verticoſæ, cum ventre circulari, rotunditatis conſpi-
cuæ, reliquo corpore verſus vertices vtrinq; magis ad Conorum rectitudi-
nem accedente. In his erit nobis quærenda genuina figura dolij, præſectis
verticibus O, N.

Dictum eſt, in hac forma ſectionis, ſegmenta Ellipſeos non ſemper
eſſe inæqualia. Cùm ergò hæc axi perpendicularis per centrum figuræ R
tranſit, quam axem vel diametrum rectam & breviorem appellant, tunc
figuræ dimidium, circa hanc ERK circum actum, ſic vt manente E, ver-
tex C per I traducatur, creat alteram ſpeciem Sphæroidis lati, cuius vertices 24.
in E, K, circulus ampliſſimus CRI, de quo itidem Archimedes.

Huc vſq; recenſere & diſtinguere figuras ſolidas ſuffeciſſet ad Dolia
vinaria. At cum prædixerim, me in hac ſpeculatione paulò longius vltra
libelli hujus metas proſpicere; adjungam cognationis cauſa etiam reliquas
ſolidorum ſpecies.

Succedat igitur in præſenti Schemate XIII. pro axe CI alia quæcunq;
diameter OS, & in ea ſtatuatur axis geneſeos. Hîc Ellipſis quidem ſecatur

Schema XIII.



per centrum R, in duas medietates ſimi-
les, quarum vtralibet circumducta circa 25.
OR manentem, creat formam Pyri, quæ
iure cognationis poſtulat adiungi Malis &
Cotoneis & Prunis, vt conſtet his bellariis
ſua integritas. At reliquæ duæ figuræ ſe-
cantur in partes diſſimiles inter ſe, vtraſq;
infinitas, ſed in Hyperbola obtuſangula ca-
ſus duo ſunt: Nam aut ſecatur angulus ob-
ſus ab electa diametro in duas partes acu-
tas, aut vna ſola pars eſt acuta, altera obtu-
ſa vel recta. Partes igitur figurarum, ex-
cepto caſu vltimo, circumductæ creant fi-
guras, quæ ad oculum nihil differunt à
Crateribus & Ceratoidibus, Numeris 6. 26. 27.
7. 9. 10. inſignitis; etſi reipſa diverſæ ſunt, 28. 29.
ob axis CI circumvolutionem, hic coni-
cam illic cylindricam, totiusq; hic partis
generantis obliquitatem.

In obtuſa verò ſectione anguli obtuſi
Hyperboles, pars maior figuræ circa talem diametrum circumducta ad-
dit vnam ſpeciem, veriùs non ſpeciem. Nam & deorſum & extorſum infi-
nita eſt (niſi, vt in omnibus talibus, ſuperficie conica vel cylindrica, quæ 30.
oritur ductu rectæ, finem ei ſtatuas (caretq; Vertice, ſed eius loco, eſt in me-
dio in vmbilicum depreſſa, circà aſcendit ſurſum leniter, idq; ſine termino.

Pro diametro OS ſumatur ei parallela BD, quæ in Ellipſi non habet
ſeparatam conſiderationem à parallela lineæ contingentis, quippe omni
diametro reſpondet ſua parallela contingens figuram. Reſtat vt illam pa-
allelam applicemus reliquis duabus figuris; ſit igitur vel extra figuram vel

 intra,

intra. Extra eſſe in Parabola & Hyperbola non poteſt, cum omnes diame-
tri parallelæ figuram continuatam intrent. Ducatur igitur aliqua diametro
OS parallela, intra figuras has duas. Rurſum autem in Parabola linea quæ
eſt diametro parallela, ipſa quoq; eſt diameter, nihil hinc gignitur novi.
In Hyperbola ſola caſus iſte locum & conſiderationem ſeparatam habet:
quam cum diameter OS in duas diſſimiles ſecuerit partes, jam hæc Paralle-
la ipſi OS vel in minori eius parte ducitur, vel in maiori. Ducatur in mino-
ri & ſit BD, ſecat igitur & ipſa figuram in partes magis adhuc diſſimiles,
31. 32. quarum maior creat aliquid Craterum Numero 7. ſimile, aut infiniti Nu-
33. mero 30. minor ſimile Ceratoidum, Numero 10. Ducatur jam in maiori
parte OQ, aliqua ipſi OS diametro parallela; quod in Hyperbolis acutan-
gulis habet caſus quinq;. Nam aut inter diametrum dividentem & verti-
cem primarium ducitur, vt inter C. O. aut per ipſum verticem primarium
C, aut inter vertices duos, primarium C, & poſitionis A, aut vltra verti-
cem poſitionis A Sed in obtuſangulis Hyperbolis vertex poſitionis non da-
tur. In vno quolibet caſu ſecatur figura in duas diſſimiles partes. Species igi-
34. 35. tur naſcuntur tredecim, quarum quatuor ſunt ſimiles Craterum, Nume-
36. 37. ro 7. tres ſimiles figuræ cavæ Numero 30. quatuor ſimiles Ceratoidum
38. 39. Numero 10. quippe acutæ: duæ reſiduæ ſunt rotundatæ in vertice, ſimiles
40. Conoidi Hyperbolico, numero 2. vna quidem, quæ eſt à parte maiore Hy-
41. 42. perboles vel acutangulæ, vel ſi obtuſangula, convenienti diametro diviſæ,
43. 44. vt dictum (debet enim illa ſecare angulum Hyperboles obtuſum in duas
45. partes acutas) ſimilis eſt obtuſangulo, quæ verò à parte minore, ſimilis a-
46. cutangulo Conoidi.

Vltima linea ſit, Contingens ſectionem, extra tamen verticem pri-
marium C, vt EF. circa quam ſi circumagantur figuræ Parabole & Hyper-
47. 48. bole, duas gignunt ſpecies infinitas, ſimiles ijs quæ ſunt numero 15. 16. mi-
nus tamen ordinatas, infinitas enim ſe extendit in tranſverſum. Ellipſis ve-
49. rò circa hanc EF circumducta gignit annulum ſtrictum conniventem, co-
gnatum illi Numero 17. quem imaginaberis in Schemate XI. quinq;
modorum circumactus, apud numerum II. ſed pro circulis ſectionum
concipe Ellipſes ad mutuum contactum æqualiter inclinatas. Contingen-
tibus accenſeri poſſet Aſymptotos, eſt enim quaſi contingens ſectionem in
50. puncto infinitùm diſtanti: & hic conſideratur nova ſpecies, quaſi media
inter annulares laxas & ſtrictas.

Sit pro contingenti, eius parallela, & ſit primum extra figuram, &
circa hanc velut axem circumagantur figuræ; quatuor fiunt ſolidorum an-
nulorum ſpecies, ex Parabola & Hyperbola infiniti in tranſverſum, quo-
51. rum dorſum in Parabolico ſemper circulariter eminet, in Hyperbolico
52. quidam eminens dorſum habent, alii extrorſum fiunt altiores, quam quo
53. loco ſunt anguſtiſſimi, non multum abſimiles figuræ numero 13. Ex El-
lipſi verò circa GH circumactâ fit annulus finitus connivens, ex altera
54. parte amplior, in forma ferè Tiaræ ſeu Globi Turcici, ſi dempſeris ei api-
cem. Hanc etiam imaginare apud primam formam circumactus, vt ta-
men pro circulis ſectionum concipias Ellipſes ad ſe mutuò æqualiter
inclinatas.

Parl-

Parallela Contingenti ſi fuerit intra figuram,vt LK,ſecans eam in par-
tes duas, multæ ſunt ſpecies, quia etiam caſus multi. Vel enim LK non
ſecat axem intra figuram, vel eum ſecat. Et ſi ſecat, tum vel tranſit verti-
cem primarium C, vel eum intercipit, excludens verticem poſitionis cir-
ca O, qui ad erectionem figuræ ſecundum EF ſequitur; ſi tamen aliquis da-
tur; nam in Hyperbola obtuſangula, ſi LK vel FE cum Aſymptoto contra-
ria RB, fecerit obtuſum angulum verſus figuram, Vertex nullus eſt : Vel
per hunc poſitionis verticem tranſit: vel etiam hunc in parte reſecta inclu-
dit. Caſus recenſui quinq; & omnes in omnibus tribus figuris locum ha-
bent; ſectiones ergo quindecim, & bina in ſingulis figuræ ſegmenta. Sed
in Hyperbola tria majora trium primorum caſuum duplicia, reſpectu effe-
ctus; aut enim deorſum excurrit infinitas ibi, vt in Parabola, aut ſurſum.
Solidorum ergo ſpecies hinc ſunt tinginta tres, quarum tredecem infinitæ 55. 56.
in tranſverſum,& ex his novem vtrinq; in vmbilicum excavatæ,(quarum 6. 57. 58.
cum eminenti labro circulari, vt Crateres Numero 7, ſed in hoc diverſi, 59. 60.
quod æquiparantur monti etiam ſubtus excavato; 3. verò ſine eminenti la- 61. 62.
bro, quarum non eſt finita altitudo, ſimiles figuræ Numero 19.) duæ acu- 63.
minatæ,Ceratoides ut Numero 10. & duæ bene rotundato vertice,Conoi- 64. 65.
des, ut Numero 2; quando ſcilicet linea, circa quam eſt circumagenda fi- 66. 67.
gura, per verticem tranſit poſitionis, ubi is datur. Harum tredecim,quinq;
ſunt Parabolicæ, octo Hyperbolicæ. Reliquæ viginti ſunt finitæ, & altera 68. 69.
parte craſſiores,reliqua tenuiores. Ex ijs enim quindecim (quinæ ex figu- 80. 71.
ris ſingulis) ſpecies ſunt in acumen deſinentes, novem quidem vtrinq;, ter- 72. 73.
næ ex figuris ſingulis,quos Nucleos appellemus:tres verò,ſingulę ex figuris 74. 75.
ſingulis,à parte craſſiori benè rotundatæ, affines ideò Sphæroidi lato; quas 76.
Fragis aut Nuci Pineæ comparare poſſumus: tres deniq;,ſingulæ rurſum ex 77. 88.
figuris ſingulis, à parte craſſiori cavæ, à tenuiori acutæ, in modum folliculi 79.
Veſicariæ, quam Germani Ceraſa Iudaica dictitant, occultè ſignantes 80. 81.
glandem penis cum præputio. Quinq; verò vltimæ ſunt Pyrorum ſpecies, 82.
à parte majori Ellipſeos, quinq; dictis caſibus ſectionis hujus, generatæ, 83. 84.
cavæ omnes, tres vtraq; parte, duæ alterâ ſolum, parte verò reliqua tenui 85.
una rotundata, & Sphæroidi ſimilis; vna acuta, ferè concidens cum Veſi- 86.
caria, ex Ellipſeos parte minori nata. Summa Octuaginta ſeptem,quibus 87.
additæ figuræ quinq; ex circulo, veluti capita familiarum, efficiunt formas
nonaginta & duas.

Tot igitur ſunt genera figurarum Solidarum à ſectionibus conicis in circulum actis reſultantium; vt jam ſegmenta ſingularum, aut compoſita à ſegmentis, ſeorſim non numerentur. Verbi cauſa, patina ſtannea conſtat plerunq; tribus ſuperficiebus, in fundo, ſegmento Sphæræ, circùm,cratere Parabolico, limbus verò eſt ex ſuperficie coni valde obtuſi, aut etiam Zona Globi obliqua. Etſi verò complurium dimenſiones artificioſæ in idem recidunt; non ſunt tamen ignoranda Geometræ diſcrimina generationis tam multiplicia, ne incautus, circa nonnullarum ſpecialium generalem conſiderationem,pertrahatur in inſidias inexplicabiles. Circa has igitur ſingulas exerceant ſe Geometræ, exemplo Archimedis; qui ex hiſce, quatuor ſolas, & quintam, Globum ipſum,conſideravit:

vit: non quòd vtiliſſimæ aut communiſſimæ eſſent, quid enim hic habet Conoides parabolicum præ Annulo, Malo, Pyro, Pruno, Nucleo? ſed quod ſimpliciſſimæ, & proximæ globo, & ingenio ſe præberent. Nos in præſens illas tantum contemplabimur, per quas acceſſus patet ad Fuſa Hyperbolica, quorum Trunci ſunt noſtratia dolia: ſubijciam igitur de ijs theoremata ſequentia.

THEOREMA XVIII.

Omnis Annulus ſectionis circularis vel ellipticæ, eſt æqualis Cylindro, cuius altitudo æquat longitudinem circumferentiæ, quam centrum figuræ circumductæ deſcripſit, baſis vero eadem eſt cum ſectione Annulj.

Intelligo ſectionem, quæ fit, plano traducto per centrum ſpacij annularis, ad ſuperficiem annularem recto. Huius Theorematis demonſtratio patet partim ex Th. XVI, & ijſdem elementis inſtitui poteſt, quibus Archimedes Stereometriæ principia tradidit.

Annulo enim (in Schemate XI.) GCD ſed integro, ex centro ſpacij A, ſecto in orbiculos infinitos ED, eoq; minimos, quilibet eorum tantò erit tenuior verſus centrum A, quantò pars eius, ut E, fuerit propior centro A, quàm eſt F, & recta per F ipſi ED perpendicularis in plano ſecante; tantò etiam craſſior verſus exteriora D: extremis verò dictis, ſcilicet D, S, ſimul ſumptis, duplum ſumitur eius craſſitiei, quæ eſt in orbiculorum medio.

Hæc ratio locum non haberet, ſi orbiculorum E, D, partes cis & vltra circumferentiam FG, lineasq; per F, G, perpendiculares, non æquales æqualiterq; ſitæ eſſent.

Corollarium I.

Hæc ratio dimenſionis valet tam in circulari forma annuli, quam in elliptica ardua, ſeſſili, connivente, tam in laxis annulis, quàm in ſtrictis: quin imò in omnibus annulis, quæcunq; eius, pro circulo ED, exiſtat figura ex ſectione eius rectâ: dummodò in plano per AD ad annulum recto, ſectionis partes cis & vltra F, fuerint æquales æqualiterq; ſitæ hinc & inde: Quod explorabimus in figura ſectionis quadrata. Sit annulus corpore quadrato, & intelligatur ſub ED quadratum. Hic annulus habet rationem dimenſionis etiam aliam. Nam eſt pars exterior Cylindri, cuius baſis eſt circulus ſemidiametro AD, altitudo DE: huic Cylindro ex Th. XVI. adimenda eſt medulla, ſeu Cylinder, cuius baſis eſt circulus ſemidiametro AE, altitudo ED. Quare quod fit ducta ED in circulum AD, minus circulo AE, æquat corpus annuli plano quadrato creati. Et ſi duceretur ED in quadratum AD, minus quadrato AE, proportio corporis facti, eſſet ad corpus quartæ partis annuli, vt eſt quadratum ad circulum, ſcilicet 14. ad 11. Sit AE 2. Ergo AD 4. cuius quadratum 16. ſed quadratum AE. eſt 4. Ergo differentia quadratorum eſt 12. quod duc in altitudinem 2, exiſtit corpus

24. cuius

24. cuius quadruplum 96. vt verò 14. ad 33. ſic 96. ad 75. cum tribus ſeptimis, Annuli quadrati corpus. Hæc ſecundum rationem Th. XVI. At ſecundum modum præſentem, cùm ſit AF 3. FG 6. vt verò 7. ad 22. ſic 6. ad 19. minus vna ſeptima: erit ergo hæc longitudo circumferentiæ FG, pro altitudine Cylindri: Et cum ED ſit 2, & quadratum eius 4, pro baſi Cylindri, duc igitur 4. in 19 minus vna ſeptima, prodeunt 76 minus quatuor ſeptimis. Ecce verum etiam ſic theorema.

Theor. XIX. & Analogia.

Annulus ſtrictus eſt æqualis Cylindro, qui habet baſin, circulum ſectionis Annuli, altitudinem æqualem eius circuli longitudini.

Valet enim modus iſte in omni omninò proportione ipſius AE ad AF, valetq; adhuc in Annulo ſtricto, ubi circuli EC circumacti centrum F, deſcribit circulum FG, æqualem ipſi DA circumacto. Nam ſecatur tale ſtrictum ex A, in orbiculos, qui in A habent craſſitiem nullam, in D duplam ipſius craſſitiei in F, ſicut circulus per D. duplus eſt ad circulum per F.

Corollarium.

Corpus Cylindraceum, quod fit (in Schemate XI) circumacto quadrilatero mixtilineo MIKN, vi ejuſdem demonſtrationis æquale eſt columnæ, quæ hoc quadrilaterum habet pro baſi, & longitudinem circuli per FG pro altitudine. Limbus verò exterior IKD, cylindraceum exterius ambiens, ut circulus ligneus dolium, planè nihil attinet ad hoc theorema, ſed alijs principijs eſt indagandus.

Analogia.

Rurſus autem valet iſte modus per omnia corpora ſeu ſegmenta Mali (vt & Cotonei) cylindracea, magis magisq; tenuia, donec tandem IK & MN coincidant, quod fit in geneſi globi, numero IV. ubi pro duabus MN eſt IK, eſt vnica BC, quare in illo corpore primùm ceſſat in ſolidum, huius theorematis demonſtratio & uſus.

Corollarium.

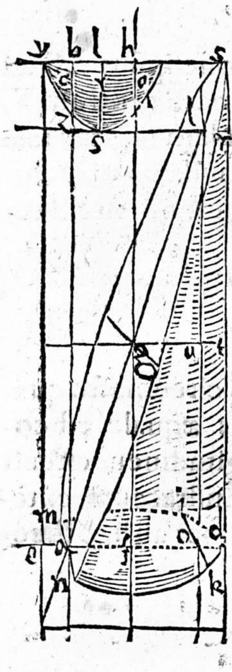
Globus eſt ad circulum ſtrictum, eodem circulo creatum, ut 7. ad 33. Nam tertia pars ſemidiametri, ducta in quadruplum circuli maximi, vel duæ tertiæ diametri in aream circuli maximi, creant cylindrum æqualem cubo. At Cylinder æqualis ſtricto, habet baſin quidem eandem; altitudinem verò, circumferentiam. Ergo ut circumferentia ad beſſem diametri, 33, ad 7. ita ſtrictum ad Globum.

THEOREMA XX.

Zona Mali componitur ex Zona globi, & ſegmento recto cylindri, cuius ſegmenti baſis eſt ſegmentum, quod deficit in figura, quæ gignit Malum, altitudo vero, æqualis circulo, quem centrum ſegmenti maioris deſcribit.

Demonſtratio. Explicetur corpus Mali ijſdem legibus in Cylindricum ſegmentum, quibus Archimedes Theor. II. explicauit circuli aream in triangulum rectangulum; & ſit AD ſemidiameter circuli maximi in corpore Mali, ex cuius puncto D, erigatur DS, ejus circuli maximi longitudo in rectum extenſa, quæ concipiatur in ſuperficie cylindrica. Nam linea MN eſt veluti communis acies, ad quam terminantur omnia ſegmenta ſolida circularia. Extenſâ verò maximi circuli circumferentia in rectum DS, ſegmenta illa ſolida circularia ſimul extenduntur, & fiunt Elliptica MSN, præterquàm primum MDN. Sed clarius eluceſcet vis huius transformationis in ſequentibus. Secetur area MDN lineis parallelis ipſi MN in aliquot ſegmenta æquelata minima, quaſi linearia, & connectantur A. S puncta, & in lineam AS, ex AD diametri punctis, per ſectiones areæ factis, ducantur perpendiculares FG, OL. ſit autem F centrum, & quæ ex F perpendicularis, ſecet AS in G, & per G ducatur ipſi FD parallela GT. Sit deniq; O punctum medium ſectionis IK, & ex illo perpendicularis OL, ſecans AS in L, & per L ducatur ipſi OD parallela LR. Cùm igitur figura circa MN circumagitur, nihil ferè creat areola MN, quia minimùm movetur; at eius parallela per F, jam movetur in circulum, longitudine FG, linea per O, in circulum longitudine OL, & ſic omnes: & partes corporis cylindracei, per FG, OL ſignatæ, ſunt æquales cylindraceis illis veluti tunicis in Globo, quas gignunt lineæ in circumactu figuræ MDN circa MN: per XVI. Theor. Tota igitur figura, ſcilicet Cylindri priſma MNDS, conſtans ex omnium tunicarum corporibus, in rectum extenſis, æqualis eſt toti corpori Mali, ex tunicis conſtanti.

Schema XIV.



Amplius, cylindraceum corpus ſuper baſi IMNK uſq; in L, cylindro ſecto per planitiem, in qua ſunt OL & KI lineæ, erit æquale cylindraceo Mali, cui dempta eſt zona exterior. Et igitur Particula cylindri, reſecta per hoc planum, ſcilicet LSDO, erit æqualis Zonæ Mali.

Cum

Cum autem GT ſit æqualis ipſi FD, & ſit ſemidiameter illius globi, cuius maximus circulus eſt MIKN, & TS ſit longitudo illius circuli maximi (quia ut AD ad DS, ſic GT ad TS) Priſma cylindri ſupra GT vſq; in S, erit æquale Globo: Et pars GVL ſimiliter erit æqualis cylindraceo corpori globi FD, per circum actum lineæ IK ad FO rectæ, deſcripti. Et igitur particula cylindri LSTV reliqua, erit æqualis zonæ globi hujus, cuius ſectio eſt ſegmentum KDI.

Sed ODSL componitur ex VTSL, & ex ODTV, ſegmento cylindraceo, cuius baſis IKD ſegmentum, & FG altitudo, æqualis circulo, quem F centrum ſegmenti maioris MIKN deſcribit, ſi figura circa MN circumagatur. Ergo etiam horum æqualia ſic ſunt; ſcilicet, vt zona Mali componatur ex Zona Globi ab eodem ſegmento deſcripta, & ex dicto ſegmento cylindraceo.

Corollarium & Praxis ſtereometrica.

Malum menſuri, ſic agemus. Datam eſſe oportet longitudinem MN deficientis ſegmenti apud A, in proportione ad diametrum circuli ſeu ſemidiametrum FD. ex qua datur ſector MFN ad IFK, per Coroll. ad Th. II. Nam ſi dimidia MN, hoc eſt IO, explicetur numero, qualium FD eſt 100000, MN erit ſin⁹ rectus arcus DI; quo dato, datur & OF ſinus complementi, & OD altitudo ſegmenti deficientis, ſeu ſagitta aut ſinus verſus in tabula ſinuum. Multiplicato igitur FO in IO, prodit area trianguli IFK, qua ablata à ſectore IFK, relinquitur ſegmentum IKD, quod duc in circumferentiam ſemidiametri AF, per Th. præſens, & creabis ſegmentum cylindri, ſuper baſi, ſegmento circuli, & altitudine FG; quæ eſt pars vna Mali, pars ſcilicet Zonæ Mali: aufer autem duplum ſegmenti circuli ab area circuli, reſtabit ſegmentum circuli inter IK & MN; quod duc in eandem circumferentiam circuli per AB deſcripti: & creabis cylindraceum Mali; quæ eſt pars altera.

Et quia ſcitur K, ſcitur igitur & IM. Quæro ergò ſegmentum globi KIM, cuius baſeos diameter IM, per Th. XIV; eandem verò baſin duc in altitudinem MN, Creabisq; cylindrum ſub hoc globi ſegmento, per Th. III. cui adde duo ſegmenta globi inventa, conflabisq; cylindraceum globi, inter IK, MN; id aufer à corpore globi noto, per Th. XIII, reſtabitq; zona globi, cuius ſectio KD; quæ eſt pars tertia Mali, pars ſcilicet altera zonæ Mali; tribus vero partibus compoſitis, totum repræſentatur corpus Mali.

Corollarium II.

Sic zona Cotonei, & zona Cucurbitæ ſeſſilis, componuntur ex zonis, illa Sphæroidis longi, hæc ſphæroidis lati, & ex cylindri preſſi ſeu Elliptici ſegmentis, illa ex planiori, hæc ex dorſuali: quorum ſegmentorum baſes, ſunt Ellipſeos ſegmenta, deficientia in figuris, quæ cotoneum & ſeſſilem cucurbitam creaverant: altitudines verò æquales circumferentijs in longum extenſis, quas centra figurarum in circumactu deſcribunt.

THEOREMA XXI.

Corpus Citrij eſt differentia inter Zonam Globi & dictum ſegmentum Cylindri.

Demonſtratio. Nam eodem modo, vt prius, cum figura (ſuperius in Schemate X, Numero V. CDB circa CAB) hic verò in Schemate XIV. IDK circa IOK circumagitur: ſegmentum areolæ in ipſam IOK terminans, ferè nihil creat, quia penè nihil movetur: at partes remotiores, iam moventur per longitudinem circumferentiarum ſuarum, donec vltima D, vel ei reſpondens R moveatur in longitudinem RS, quanta eſt circumferentia circuli ampliſſimi per corpus Citrij: ex quibus elementis conficitur, vt corpus Citrij (CDBE, in Schemate XI.) ſit hic in Schemate XIV. æquale ſegmento cylindri LRS. At cùm AD dupla ſit ipſius FO, id eſt GV, erit & OL, dupla ipſius CZ. Corpus igitur ODRL rectum, duplum ipſius VTRI; pars igitur ODTV, æqualis parti VTKL. Sed RLS eſt differentia inter LSTR, & LRTV, quorum illud æquale Zonæ Globi, hoc æquale ſegmento Cylindri VDTV. Patet igitur propoſitum.

Corollarium & Praxis.

Oportet eſſe datam longitudinem axis Citrij, & diametri circuli maximi per corpus medium. Multiplicato igitur axe in ſeipſum, & facto diviſo per diametrum huius circuli maximi in corpore Citrij, prodit aliquid adijciendum diametro Citrij: vt hoc aggregatum eſt ad diametrum circuli 200000, ſic axis ad ſinum ſegmenti quod creat citriū; Sic & diameter Citrij ad ſinum verſum. Ex eo ſimilis, ſed tamen brevior, eſt calculus vna operatione, quàm prius. Non indigemus enim cylindraceo Mali: ſed invento primum ſegmento VTKO, deinde Zonâ Globi LSTV, aufertur illud ab hac, & reſtat LSR corpus Citrij.

Corollarium II.

Sic corpus Olivæ vel Pruni Elliptici, eſt differentia inter Zonam Sphæroidis illic longi, hic lati, & inter dictum ſegmentum Cylindri Elliptici.

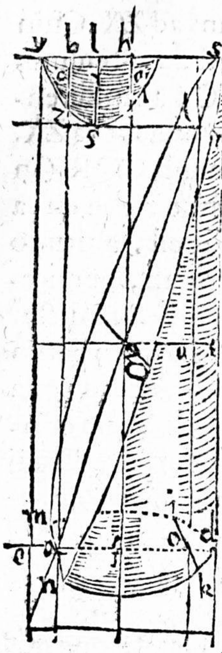
THEOREMA XXII.

Zona Citrij truncati vtrinq; æqualibus circulis, componitur ex corpore minoris Citrii, quod creatur ab eodem circuli ſegmento, quo & Zona propoſita creata eſt, & ex ſegmento Cylindri, cuius baſis eſt idem minus ſegmentum circuli, altitudo æqualis circumferentiæ circuli truncantis.

Repe-

Repetatur enim Schema XIV. Et ſit in eo ſegmentum I SR Cylindraceum, æquale Citrio maiori. Explicetur autem hoc ſegmentum ſeorſim, vt baſis eius in conſpectum veniat, eſt autem baſis iſta, ſegmentum plani Circularis, quod creavit Citrium maius, ſeu truncandum. Intelligatur ſegmentum hoc circuli ſub recta YBLH, & ſub arcu YCRQ. Sit autem Citrium hoc utrinq; truncatum (quale, ſchemate ſequenti XVIII. cernitur literis EAH FSQCG) ſic ut intelligamus creatum eſſe non integro ſegmento circuli, ſed parte ejus interiori BCQH, arcu CRQ circa BH axem circumacto. Repræſentabunt igitur rectæ BC, HQ, ſemidiametros circulorum Truncantium: & Baſis iſta ſecabitur in partes quatuor

Schema XIV.



1. BCY ad latus vnum, triangularis mixtilinea.
2. Altera vltra HQ, ad latus alterum, priori ſimilis.
3. Parallelogrammum rectangulum BHQC, in medio.
4. Segmentum circuli minus, à tergo, rectâ CQ & arcu CRQ contentum.

Cum autem ponatur ſolidum æquale Citrio maiori toti, erit RS altitudo ſolidi, æqualis circumferentiæ circuli per medium huius Citrij corpus. Et quia planum YSH idem eſt, in quod in cidunt hypotenuſæ rectorum angulorum BCZ & LRS: quare vt LR ad RS, ſic BC ad CZ. Sed LR eſt ad RS, vt radius circuli ad circumferentiam ſuam: ergo & BC ad CZ ſic eſt. Itaq; cum BC ſit ſemidiameter truncantis; erit CZ circumferentia truncantis.

Quatuor ergo dictis baſeos partibus, totidem ſolidæ ſuperſtant;

1. Super BCY, ſtat BYCZ Pyramidalis, mixtis & ſuperficiebus & lineis contenta.

2. Similis ei ultra HQX. Et hæ duæ ſunt æquales duobus Verticibus ſolidis, de Citrio reſectis. (In Schemate XVIII, ſequenti, vertices hi ſpectandi ſunt literis GEI, & FNH.)

3. Super BHQC ſtat Priſma ſeu Pentahedron BCZXHQ, quippe quod continetur tribus quadrilateris BCQH, CQXZ, XZBH, & duobus triangulis CZB, QXH; eius altitudo eſt CZ, inter QC, XZ parallelos. Hoc ſolidum eſt æquale Cylindro medio, in corpore truncati Citrij, baſes habenti, circulos truncantes. (Hic Cylinder in Schemate XVIII. ſequenti adumbratur literis EHFG, totusq; latet intra zonam FCG, HAE.)

4. Deniq; ſuper ſegmento parvulo CQR, ſtat ſolidum SRQCZSX, ſimile illi, in quod zona Mali explicabatur. Cum autem tota figura ſolida HYSR, æquet totum Citrij corpus, & tres recenſitæ partes, totidem partes Citrij æquent: reſidua etiam iſta Cylindracei ſegmenti, reſiduam Citrij partem æquent, neceſſe eſt; Eſt autem zona ambiens Cylindrum jam modo ductum, in corpore Citrij truncati.

Atqui vt ſimilis eſt iſta pars ſolida priori, quæ Zonam æquabat Mali; ſic etiam duas, vt illa, partes habet, manifeſtis ſignis ab invicem diſcretas: vna eſt ſegmentum cylindri rectum, contentum ſuperficiebus quatuor,

 plano

plano parallelogrammo CQXZ, ſuperficie cylindrica XZCRQ, & duobus ſegmentis parvis circuli; quorum vnum apparet, literis QCR, alterum ad XZ non apparet, Et huius ſegmenti altitudo CZ, vt jam eſt demonſtratum, æquat circumferentiam circuli Truncantis. Altera huius zonæ pars eſt Priſma ZXS, ſuper eodem ſegmento parvo ſtans ad ZX. Cùm autem LR dixerimus ſic ſe habere ad RS, vt ſemidiamr eſt ad circulum; & ſit etiam BC ſic ad CZ; erit etiam ſic differentia LR & BC, ad differentiam RS & CZ: quæ eſt altitudo huius ſecundæ partis de zona ſupra ZX. Sed differentia LR & BC eſt latitudo, vel ſinus verſus ſegmenti CQR (in Schemate XVIII. AP, quæ eſt ſemidiameter Citrij minoris, arcu HAE circa axem HE deſcripti) Ergo etiam differentia RS & CL, hoc eſt, altitudo huius Priſmatis Cylindracei, eſt æqualis circumferentiæ circuli, per medium corpus Citrij minoris. Per ea igitur, quæ Th. antecedenti ſunt dicta. Priſma hoc Cylindraceum ZXS, eſt æquale Citrio minori, ſegmento parvo CQR deſcripti (quod eſt in Schem. XVIII. ſeq. HAE.) Et ecce in zona Citrij truncati duas partes, quales in Theoremate deſcripſimus. Vt ita conſtet corpus Citrij truncati ex tribus omninò Elementis, ex corpore Citrij minoris, ex Cylindro, & ex ſegmento cylindri recto.

Corollarium & Praxis.

Menſuri corpus Citrii vtrinq; truncati, ſic agemus. Datam oportet eſſe longitudinem diametrorum tam circuli maximi in corpore medio, quam circulorum truncantium: datum ſit etiam intervallum inter circulos truncantes, omnia in eadem menſura. Tunc aufer diametrum truncantium à diametro maximi, quod remanet, dividat quadratum intervalli inter truncantes; quotienti adde diviſorem. Vt ergo compoſitum hoc ad diviſorem, ſic 200000, menſura diametri uſitata in Canone ſinuum, ad ſinum verſum ſegmenti, quod creat, I. Citrium minus, II. Zonam Citrii maioris, III. Zonam Globi. IV. Zonam Mali, quod creatur eiuſdem cum Citrio minori circuli ſegmento maiori: ſic etiam idem numerus 200000 eſt ad diametros intervallumq; Truncantium in eadem menſura.

Iam igitur per Corollarium ad XXI, quære corpus Citrii parvi, per Zonam Mali & per Zonam Sphæræ; hoc corpus eſt pars vna Citrii Truncati. Deinde per numerum diametri truncantis, iam inventum, quære longitudinem eius circumferentiæ in eadem menſura, eamq; multiplica in ſegmentum circuli inventum; prodibit Citrii truncati pars altera, & iunctæ hæ duæ partes, conſtituent eius Zonam. Tertiò multiplica planum circuli truncantis in numerum intervalli truncantium, iam inventum, prodibit pars tertia Citrii truncati. Omnibus in unam ſummam coniectis, componetur totum corpus Citrii truncati.

Corollarium II.

Zona Olivæ aut Pruni Elliptici truncati componitur ſimiliter ex corpore Olivæ aut Pruni minoris, quod eodem Ellipſeos ſegmento creatur; & ex

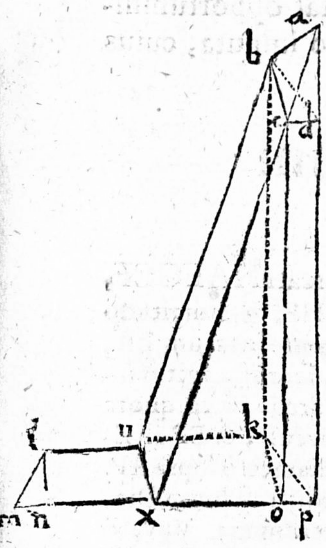
& ex ſegmento Cylindri preſſi, quod eidem Ellipſeos ſegmento ſuperſtat, altitudinem habens æqualem circumferentiæ circuli truncantis Olivam aut Prunum.

Epiſagma.

Huc diſtuli demonſtrationem Theorematis XVII. de Zona ſeu Tunica Trunci conici circa Cylindrum: propterea quod cognata eſt demonſtrationi Theorematis præſentis.

Sit KLMP Trunci Conici recti ſectio per axem VX, KO diameter circularis baſis PM, diameter circuli Truncantis KL, cui parallelæ ſint KO, LN, vt ſint æquales KL & ON, & KOP figura ſimilis figuræ LNM, & KVXO quadrilateræ, ſimilis LVXN. Explicetur autem trunci ſoliditas in rectum, iiſdem legibus, quibus hactenus omnis generis figuras, ſuperficiebus, in omnes plagas curvis, terminatas explicavimus. Cum igitur linea PK conicæ ſuperficiei ſit in has plagas PK, recta, explicata igitur ſuperficies erit plana, ſcilicet ABKP, & PA erit æqualis circumferentiæ baſeos PM: KB verò æqualis circumferentiæ circuli KL truncantis, cui æqualis erit OC: fiat tantem eidem æqualis & PD, & puncta DCB connectantur; quæ formabunt triangulum æquale & ſimile triangulo POK, & latera vnius, lateribus alterius parallela, vt & planum plano.

Schema XV.



Duo igitur Pentaedra ſeu Priſmata, BCVXOK & KOPDBC ſunt æquealta, quippe ſub parallelis planis: Sed diſcrimen eſt inter illa, quod parallelepipedum baſi KOXV, altitudine OC, eſt duplum priſmatis CBVXOK, at Priſma baſi PKO, altitudine eadem, eſt ipſum ſui totius menſura: eſt tamen & ipſum triplum Pyramidis æquealtæ POKD. Deniq; ſuper DCB baſi ſtat Pyramis DCBA, habens altitudinem DA, differentiam circumferentiarum KL, PM, cum baſis DCB ſit æqualis baſi Pyramidis POK D. Cùm autem Pyramides ſuper æqualibus baſibus, ſint inter ſe, vt earum altitudines; Pyramis ergo tertia, baſi POK, altitudine PA, compoſitâ ex PD, DA, (hæc autem æquat circumferentiam PM) erit æqualis Pyramidi vtriq;, POKD & DCBA. Et Priſma baſi & altitudine iiſdem, erit illius triplum; altitudine verò, tertia parte ipſius PA, erit his 2 Pyramidibus æquale: Quod vero de Priſmate humiliore KOPDBC reliquum eſt, puta DOKBC, duas tertias retinet Priſmatis. Ergo huius reliqui corpus creatur, ductis duabus tertijs altitudinis CO (ſeu circumferentiæ circuli KL vel ON) in baſin POK. Hæ ſunt igitur partes corporis de Trunco, quod Zonam ſeu Tunicam appellamus. Reliqua pars, Cylinder ſc. intermedius, æquat Priſma CBVXOK, quod eſt veluti triangulum COX corporatum, craſſitie OK, XV, CB, ubiq; æquali; fit igitur vt cum triangulis, vt baſis KOXV, ducta in dimidiam altitudinem CO (ſemicircumferentiam ipſius KL vel ON) creet corpus huius Cylindri. Hæc de geneſi: reliqua quibus compendium noſtrum inititur, brevitatis & lucis cauſa, per Synopſin tradam.

Per

Per demonſtrata hactenus,

Pro Tunica	Pro Cylindro
Ducitur KOP	Ducitur KOXV
Per æquipollentiam dimidia PO vel ipſa PO	vel OX, vel ejus dupla ON
In trientem PA, & Beſſem OC	In ſemiſſem OC
Per æquipollentiam, In trientem PM & Beſſem ON	In ſemiſſem ON, hoc eſt, in OX
Per æquipollentiam, In totam PM, & duas ON	In ON, NX. tres ſcilicet OX.

Ducitur ergo permutatis terminis

PO, vel ejus duplum PO, NM hoc eſt differentia diametrorum KL, PM.	ON, NX, vel ejus duplum, quod eſt triplum ipſius ON diametri minoris.
In totam PM & duas ON	In ON diametrum minorem: quod erat demonſtrandum.

Compendium quod ex hac demonſtratione reſultat opportuniſſimum, pete ex Th. XVI. XVII. & huic ſupplemento imputa, cuius eſt ornamentum ſingulare.

Exemplum præcedentium aliquot Præceptorum.

Sit, in Schemate XVIII. ſequenti, corpus Citrij Truncati HAEGCF, & diameter circuli maximi in eo AC, ſit 22, Truncantium EG, HF, 19, longitudo interjecta HE vel MK vel FG, ſit 27. Ergò etiam dimidia harum linearum LA, KE, KL ſunt inter ſe in eadem proportione, ſc. ut 22. 19. 27. Differentia igitur inter AL, LQ (æqualem ipſi EK) eſt 3. Quęrendum eſt primò, arcus HAE quota pars ſit ſui circuli. Cum igitur AC ſit portio de diametro hujus circuli, & EP in illam perpendicularis, vt igitur AP ad PE, ſic PE ad reſiduum de diametro ſupra AP. Cùm ergo PE ſit 27, qudm. ejus 729, divide hoc per AP 3, provenit reſiduum Diametri 243, cuj addita AP 3 conſtituit diametrum 246, ſemidiametrum 123. Vt verò canone ſinuum uti poſſimus, lineæ omnes debent nanciſci numeros, in illo Canone uſitatos: quod ſi 123 fit 1 00000, ergo AP pro 3 fiet 2439, & hic eſt ſinus verſus arcûs AE quæſiti. Quare ſecundum doctrinam de uſu Canonis ſinuum, ablatus à radio 100000, relinquit 97561, ſinum complementi huius arc°. ſc. G. 77. M. 19. S. 9. Ergo arcus AE eſt, G. 12. M. 40. S. 51, ejusq́; ſin° PE ex Canone eſt 21951. Idem ex regula, ſi fiat vt 123 ad 1 00000, ſic 27, quanta fuit PE in prima dimenſione, ad numerum huius dimenſionis, prodit enim 21951. Itaq́; totus arcus EAH eſt G. 25, M. 21. S. 42.

Et quia, per Th. XXII, opus nobis eſt cognitione areæ in ſegmento EHA, inquiremus illam per Corollarium II. ad Th. II. in hunc modum. Totius Circuli area valet talium particularem 3 14159 26536, qualium ſunt in Quadrato diametri 4 00000 00000: intellige particulas quadratas, longas & latas vnam talem vnitatem, qualium ſunt in diametro 2 00000 longæ. Pars igitur areæ circuli, contenta ſub EH arcu & lineis, quæ E, H, terminos cum centro connectunt, ſector ſcilicet arcus EH (qui ſemper eſt proportionalis ſuo arcui) valet 22132 22936. Ab hac area ſectoris auferendum eſt triangulum, cujus vertex in centro, baſis, recta EH. Cum autem ab A in centrum, ſint 1 00000, ſed ab A in P, 2439: Ergo à P in centrum, hoc eſt, perpendiculum Trianguli, erit, vt prius, 97561. Duc hoc perpendiculum in PE, dimidiam baſin, quæ inventa eſt 21951: fiet 21415 61511, area Trianguli, qua deducta de ſectore, reſtabit 716 61425, area ſegmenti EHA.

Ex hac area ſegmenti nobis innoteſcit ſegmentum rectum Cylindri, cujus baſis, eſt hæc area ſegmenti circuli, nimirum pars minor de Zona illius Mali, quod deſcribitur à ſegmento circuli, poſt ablatum EAH, reſiduo, & majore, circa axem HE circumacto. Nam per Th. XX, ducenda eſt hæc area in circulum, quem centrum

huius

huius ſegmenti majoris deſcribit. Hujus igitur circumferentiæ longitudo inquiritur ſic. Perpendiculum Trianguli, eſt diſtantia centri, ab axis EH, puncto P medio, ſc. 97561: & hic eſt quæſiti circuli radius: cùm autem circulorum ad ſuos radios vna ſit eademq; proportio, per Th. I. Vt igitur 1 00000 radius, ad 6 28318 ſemis, circumferentiam circuli EAH, ſic 97561 radius, ad ſui circuli circumferentiam 6 12994, quæ ducta in aream ſegmenti, efficit 4392 80235 56450.

Igitur qualium cubus, in quem globus, ex circulo EAH factus inſcribitur, habet 8 00000 00000 00000 partes cubicas, vnam centies milleſimam ſemidiametri longas latas & altas, quarum 4 18879 02047 86301 ſunt in corpore Globi; talium cubiſcorum ſumma expreſſa eſt in prodeunte ſumma, & tot omnino exiſtunt in parte illa Zonæ Mali, quam æquat ſegmentum Cylindri rectum, Th. XX. deſcriptum.

Pars altera huius Zonæ Mali, eſt Zona globi EAH, per idem ſegmentum EPHA, circa reliquum corpus globi, deſcriptum, per Th. XX. Ergo quęrenda eſt Zona globi, cujus maximus circulus ſit EAH. Reſpiciatur igitur Schema VIII. in quo ſit KCN arcus idem, de quo hactenus egimus. Ergo globi CDBL Zona, quę per KDN & HBM tranſit, eſt inquirenda. Ergo per Th. XV. Coroll. II. quęratur corpus ſegmenti globi KHD. Cùm ergo ſit NK. G. 25. M. 21. S. 42. & CK. G. 12. M. 40. S. 51. erit igitur KD. G. 77. M. 19. S. 9. cuius ſinus KI eſt 97561. At circulus per KIH, eſt Baſis ſegmenti HKD, ſic ut KI ſit eius ſemidiameter. Non poteſt igitur ignorari area. Nam ut quadratum CA radij, 1 00000 00000, ad aream circuli ſui, ſic etiam quadratum KI, quod eſt 95181 48721, ad aream circuli KIH, 2 99021 46098. Hæc ſi ducatur in tertiam partem ipſius IO, ut altitudinis Coni, creat corpus ſegmenti HKD. Invenienda eſt igitur IO, ex præſcripto Theor. XIV. Cùm enim KC ſit nota, & IA, ejus ſinus, ſupra fuerit 21951: quare ID eſt 78049, & IL 1 21951. Vt autem IL ad LA, ſic ID ad DO. Diviſâ ID 78049 (auctâ quinque cyphris) per IL, 1 21951, prodit DO 64000. Tota igitur IO 1 42049, & pars ejus tertia 47350: quę ducta in baſin KH, creat 1 41586 66177 40300, corpus ſegmenti HKD, cui eſt æquale ſegmentum inferius MNL: cùm totius Globi corpus per Th. XII. ſit 4 18879 02047 86391. Ablato vtroq; ſegmento, reſtat in Trunco HKNM 1 35705 69693 05791. Poſſes hucuſque pervenire etiam ſine cognitione areæ in baſi, per XIV. Corollarium. Nam IL eſt altitudo majoris ſegmenti de ſphæra, & ID ejus reſiduum ad Diametrum. Vt ergo ID ad DA ſemidiametrum, ſic IL altitudo majoris ſegmenti, ad LP: vnde habetur tota IP, pro ſegmento majori, & erat IO pro ſegmento minori, ſic ut compoſita OP æquipararetur Sphærę toti: Prodit enim eadem ſegmenti HKD quantitas, quę antea.

Porrò de Trunco HKNM adhuc reiciendus eſt cylinder medius, cujus baſis eadem quę ſegmenti, ſc. HIK, altitudo verò, KM, vel duplum ipſius IA. Erat autem IA 21951. tota igitur altitudo eſt 43902, quę ducta in aream circuli HIK, creat 1 31276 40179 94396 Cylindrum, Zonâ quęſitâ amictum, quo ablato de Trunco HKNM, reſtat Zona KCN, HBM 4429 29513 11395.

Vt autem redeamus ad Schema XVIII. hujus ultimi cylindri altitudo in illo repreſentatur per EH, & Zona globi habet idem ſegmentum EHA, quod erat in priori ſegmento cylindri recto. Ex his ergo duabus partibus, ex illo ſegmento cylindri recto, & ex hac Zona globi, compoſita eſt Zona Mali.

Hinc verò, per Th. XXI. facile habetur corpus Citrij, quod eodem ſegmento EHA deſcribitur, ſubducto illo ſegmento cylindri 4392 etc. ab hac Zona globi 4429 etc: Nam reſtat 36 49277 54945, corpus parvi Citrij, per ſegmentum EAH, circa axem EH circumactum, deſcripti: cujus uſus jam fiet neceſſarius.

Iam tandem ad Citrium majus IANC, ejusq; Truncum medium HAEGCF. Conſtat enim & hic Truncus, cylindro FGEH, & Zonâ cylindrum veſtiente, quę deſcribitur ſegmento HAEPH, circa axem MLK circumacto, ſic ut H per F tranſeat, A per C, P per O, & E per G.

Cylinder igitur FGEH ſic inveſtigabitur: qualium AL eſt 22, talium PL vel HM dabatur 19, & AP 3. Sed pro uſu canonis ſinuum, ex AP 3, facta eſt 2439, qualium ſcilicet totius circuli EAH radius, eſt 1 00000. Vt igitur 3 ad 2439, velut 123 ad 1 00000 (ut prius) ſic 19 ad 15447. Tanta eſt jam ſemidiameter HM, circuli HF,

Sch. 8. [beside "Reſpiciatur igitur Schema VIII."]

Sch. 18. [beside "Vt autem redeamus ad Schema XVIII."]

cujus area eſt inquirenda. Vt autem quadratum radij 1 00000, quod eſt 1 00000-00000, ad aream circuli 3 14159 26536: ſic etiam eſt radij 15447 quadratum 23-86 09809, ad aream ſui circuli 7496 14823. Hæc eſt area HF vel EG, baſis cylindri. Sed & altitudo eius ex antecedentibus conſtat: eſt enim (ut prius in Cylindro Globi) 43902. Ducta igitur hęc altitudo in aream Baſis modò inventam, creat corpus cylindri FHEG 3290 95899 59346. Reſtat Zona Citrij majoris. Per Th. XXII. verò, Zona hæc Citrij majoris NAIC, vel Trunci NAEGCF, componitur ex corpore invento Citrij minoris, per HAE deſcripti, & ex ſegmento cylindri, ſtante ſuper EHA, & habente altitudinem æqualem circumferentiæ circuli HF truncantis: Rurſum igitur ut radius 1 00000 ad circũferentiam 6 28318 f. ſic radius HM, ad circumferentiam HF 97056, quam duc in ſegmentum circuli EPHA initio inveſtigati 716 etc: & creatur ſegmentum cylindri rectum 695 51712 64800, Pars Zonæ in Citrio Truncato. Cui adde corpus Citrij minoris ſupra inventum 36 etc: prodit Zona tota circa truncatum Citrium 732 00990 19745. Adde ultimò & Cylindri corpus, intra Zonam abditi 3290 etc: conflabiſque totum corpus Citrij truncati 4022 96889 79091. cujus pars major quintâ, minor ſextâ, infarcta eſt in Zonam.

Lubet comparationis cauſa computare etiam corpus, non Citrij, ſed compoſitum ex duobus truncis Conicis ACFH & ACGE, ſic ut AH, AE, CF, CG ſint rectę: computandum igitur eſt corpus Coni GBE, & Coni CBA, ex Th. XVII. Sit ergò conus GBE, hujus baſis, area circuli GE, jam in ſuperioribus fuit inventa 7496 etc. Altitudo verò KB ſic habetur. Nam ut AP 3, ad PE 27, hoc eſt ut 1. ad 9, ſic EK 15447. ad KB. Cùm autem pro coni corpore tertia ſolum pars altitudinis ſit multiplicanda in baſim, per Th. IV. Ergò triplum EK, 46341 ductum in baſin, creat 3473 79005 12643. corpus coni GBE. Iam ad Conum alterum, cujus baſis AC, area nondum eſt nota, ſed facile inveſtigatur ex area circuli EG. Nam EK vel PL eſt ad LA, ut 19. ad 22, Ergo quadrata ſunt ad invicem ut 361 ad 484. Vt verò quadrata ad invicem, ſic ſunt etiam areæ circulorum. Eſt igitur area circuli AC, qui baſis eſt coni ABC, 10050 23661. Rurſumque ut AP 3 ad PE 27, hoc eſt 1. ad 9; ſic AL, 17886 (compoſita ex AP, & PL vel HM ſupra inventis) ad LB altitudinem coni. Quare etiam hujus noncupli partem tertiam, hoc eſt, triplum ipſius AL 53658 duc in aream inventam, creabiſque corpus coni ABC 5392 75596 01938. Hinc aufer conum GBE, reſtat truncus unus ACGE, 1918 96590 89295, cui æqualis eſt alter ACFH. Totum igitur corpus ex truncis conicis compoſitum, erit 3837 93181-78590. Ecce ut minus habeamus quam antea, per 145 03708 00501 ſcilicet tantum eſt infarctum in duas Zonas obliquas, arcubus HA, AE, & rectis HA, AE, adumbratas: puta partem paulo minus Viceſimam octavam trunci duplicis. Quod ſi altera breviori methodo uſus, ut in Conis ſimilibus, feceris, ut 10648: cubum de 22, vel 6859, cubum de 19, ad eorum differentiam 3789, ſic conum majorem 5392 etc: (vel etiam minorem, ſi prior daretur) ad quartum: prodibit truncus idem, ut prius.

At ſecundum Th XVII. ejuſque demonſtrationem in proximo Epiſagmate præmiſſam; Cùm ſit inventus Cylinder FHCG 3290 etc, quare dimidium ejus 1645 47949 79673: ſciatur verò AC 22 (in ſua ꝓpria menſura): & PO, vel HF 19, cujus duplum 38, & additâ AC 22. ſumma fiat 60, & differentia diametrorum ſit 3, ductis ergo 3 in 60, creatur rectangulum 180, repræſentans Tunicam: quadratum verò 19 minoris diametri HF, id eſt quadratum de 19, eſt 361, cujus triplum 1083 repræſentat Cylindrum Trunco inſcriptum. Vt ergo 1083 ad 180 ſic Cylinder 1545 etc: ad Tunicam. Vel brevius, ſecundum compendium corollarij ad XVII. ſic agemus.

Dia-	19.	20.	21.	22.	metri.	Vel ſic	19	3	
	19.	3.					22	3	
	361.	60.					418	9	
		421.					3		421

Vt igitur 361 ad 421, ſic Cylinder inventus 1645 etc: ad 273 4868971691: ſupra verò, Cylindro ablato à trunco, erat hoc corpus 273 48641 09622: differentiam minutulam faciunt ſinus quibus non penitus exactis uſi ſumus.

De Fuſis.

Hactenus Cylinder & Globus, aut ejus loco Sphæroides, in ſegmentum cylindri ſui transformata, nobis ſubſidio venerunt ad prodendas menſuras Malorum, Citriorum, Cotoneorum, Melonum ſeſſilium, Olivarum, & Prunorum Ellipticorum. Cùm enim corporum totorum leges in ipſis figuris non inveniremus, partium corporis menſuras in Cylindrorum partibus invenimus. At cum partes quædam Cylindri definitionem quidem habeant certam, ſcientiam verò ſeu leges corpulentiæ in ſeipſis vel nullas, vel nondum in lucem prolatas; Globus & Sphæroides ſucceſſerunt, quæ cum dimenſionem corpulentiæ habeant antea, transformata in talem Cylindri partem, eaſdem leges corpulentiæ in illum intulerunt. Reſtat nunc difficilior de Fuſis Parabolicis & Hyperbolicis contemplatio, in qua nos demonſtrationis methodus hactenus adhibita rurſum deficit. Nam etſi Fuſum eodem modo quo Citrium & Olivam & Prunum, transformes in columnæ priſma, quod curvaturam lineæ conicæ (in Schemate X.) ſectionum OCH, PCQ vel MCN, toto dorſo erecto retineat; Huius tamen figuræ corpus nihilo magis demonſtrari poteſt, quam Fuſi ipſius. Primùm enim hic totum nullum eſt, ad quod priſma poſſit comparari; quippe columna, ut ſectio ipſa, ad latus MN vel PQ infinita erit: deinde non congruit globus ſuo circulo maximo, non Sphæroides, in talem columnam conicam: aut enim tangit circulus conicam intus in puncto unico, ſi fuerit ex foco figuræ A, per ejus verticem C deſcriptus: aut ſi paulò amplior circulus per C fuerit deſcriptus, tangit quidem figuras exteriùs in C, ſecat verò eaſdem ſtatim binis punctis ipſi C proximis, de reliquo penitus diſſidet à ſectione.

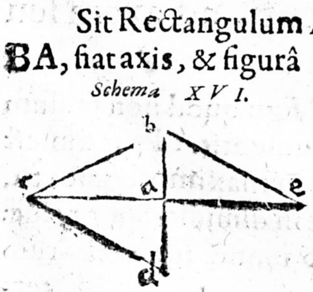
Reſtat igitur, vt ſicut in corporibus, à Circuli ſegmento creatis, ad globum confugimus, in Ellipticis ad Sphæroides; ſic in ijs quæ à Parabola & Hyperbola, confugiamus ad Conoidea congenera: quod niſi ſuccedat ex alſe conatus, de reliquo Geometras in ſubſidium vocabimus.

Theorema XXIII.

Coni duo, creati à rectangulo ſcaleno, alter minori, alter majori latere eorum, quæ circa rectum, pro axe conſtitutis, ſunt in proportione laterum, quæ baſes ipſis Conis deſcribunt.

Sit Rectangulum ABC, cujus laterum circa rectum angulum, minus BA, fiat axis, & figurâ circumactâ, ſubtenſa BC creet ſuperficiem Conicam CBE, cujus vertex B, baſis CE. Rurſum fiat maius latus AC, axis; & figura circa AC manentem circumacta creet Conum BCD, vertice C, baſi BD circulo. Dico ut eſt BA ad AC, ſic eſſe corpus, quod circulo CE, & ſuperficie conica CEB, continetur, ad corpus Coni BDC.

Schema XVI.



Demon-

Demonſtratio. Nam per allegata Theor. XVII. Proportio Coni EBC, ad Conum BCD, eſt compoſita ex proportione Circuli EC ad circulum BD, & ex proportione altitudinis AB, ad altitudinē AC, ſed circuli EC ad circulum BD proportio, dupla eſt proportionis AC ſemidiametri ad AB ſemidiametrum. Ergò Conorum, EBC ad BCD, proportio eſt compoſita ex proportione AC ad AB, & iterum ex eadem AC ad AB, & tertiò ex AB ad AC. Sed proportio AC ad AB, compoſita cum proportione AB ad AC, conflat proportionem æqualitatis, quæ eſt proportionum minima, hoc eſt terminus, & æqualitas, quæ addita vel ablata à proportionibus reliquis, nihil mutat. Igitur ex tribus elementis proportionis Conorum, quorum duo ultima ſe mutuò tollunt, ſolum primum reſtat, & Conus EBC, ad Conum BCD, eſt ut AC, ſemidiamr circuli EC, ad AB, ſemidiametrum circuli BD.

THEOR. XXIV.

Sphæroides longum inſcriptum ſphæroidi lato, ſic ut eaſdem habeant diametros, ſed axes in iis permutatos, eſt ad Sphæroides latum, ut diameter brevior ad longiorem.

Sit in Schemate XII. Sphæroides longum CEI, ad dextram, cuius vertices C, I, latum KCE ad ſiniſtram, verticibus K, E, & ſit illius axis CI, æqualis huius diametro CI, illius verò diameter KE, æqualis axi huius KE, dico Ellipſin longam, ſeu Ovum ad dextram eſſe ad latam ſeu Lentem ad ſiniſtram, ut KE brevior diameter ad CI longiorem. Deſcribantur enim Coni, in dimidio Ovo KCE, cuius vertex C, baſis KE circulus; in dimidia verò Lente CKI, cuius vertex K, baſis CI circulus, per præmiſſam igitur, vt KR ſemidiameter circuli EK, ad RC ſemidiametrum circuli CI, ſic Conus KCE ad Conum IKC. Sed dimidium Sphæroides ſemper eſt duplum Coni ſibi inſcripti ad eundem axem, & ſuper eadem baſi circulari: Ergo etiam Sphæroidum dimidia, & ſic Sphæroidea tota, ſunt in proportione, vt KR ad RC, hoc eſt, vt eorum dupla KD ad CI.

THEOR. XXV.

Segmentum Globi ad Citrium, eodem ſegmento circuli deſcriptum, videtur eam habere proportionem, quam habet ſemidiameter baſis ſegmenti, ad axem ſeu altitudinem ſegmenti.

Demonſtrationem legitimam quærant alij: Ego quod non poſſum apodicticè, comprobabo dicticè; quatuor uſus documentis. Primum eſt ab Analogia. Quod enim in dimidio globo, velut in maximo ſegmento, quod eſt principium ſegmentorum, verum eſt, vt & in dimidio Sphæroide; quod item in minimo ſegmento, & veluti in vltimo omniū ſegmentorum ter-

termino, id videtur etiam in ſegmentis intermedijs locum habere. At in dimidio globo res ita habet: quemadmodum enim latera circa rectum angulum quadrantis, habent inter ſe proportionem æqualitatis, ſic etiam quod creatur, quadrante circa perpendiculum voluto, æquale eſt ei, quod creatur, eodem quadrante circa baſin voluto. In minimis verò ſimiliter locum habet iſta proportio: quia quo minus globi ſegmentum, & Citrium in eo, hoc minus ab hiſce differunt Coni, figuris ipſis inſcripti: Conorum verò iſtorum, vt habet Theor. XXIII. eſt dicta proportio: quare & circumſcriptorum ſolidorum. Etſi fateor, ab eo quod eſt abſolutè minimum, ad id quod minimo proximum, non ubiq; tutam eſſe collectionem.

Secundò, Proportio dicta locum habet in Sphæroide dimidio, etiamſi ibi non regnet æqualitatis proportio inter diametros, ut in globo, & quidem in infinitis Sphæroidibus, & infinitis diametrorum per illa proportionibus: vt eſt in Th. antecedenti. At ſicut Sphæroides longum inſcribitur Sphæroidi lato, ſic etiam Citrium totum, ſegmento duplicato Hemiſphærii inſcriptum eſt, & generatio utrinq; ſimilis intelligitur; Ergo cum dicta proportio obtineat inter Sphæroides longum & latum, obtinebit etiam, ut videtur, inter Citrium totum & ſegmentum duplicatum ſemiglobi. Tertiò, vicem demonſtrationis plenariç ſuſtinet hoc, quod, in Sch. XVIII. ſeq. ſegmentum Circuli obliquum, contentum ſub AE recta & AE arcu, quod creat exceſſum tam ſegmenti, quam dimidij Citrij, ſupra ſuos Conos, ſupra apud A, & infra apud E æqualis eſt latitudinis: itaq; quæ eſt proportio PE ad PA, ejuſdem proportionis motum faciunt partes E circa PA circumactæ, ad motum partium A circa PE circumactarum. Corpus igitur obliquarum Zonarum in eâdem proportione accumulatur ad Conos inſcriptos, in qua ſunt ipſi Coni inter ſe. Quartò his accedit calculus & teſtimonium numerorum: qui licet operoſiſſimè tractentur & ſubtiliſſimè, per diviſionem diametri in particulas 100000, tandem tamen inepti fiunt ad refutandam hanc proportionem.

In ſuperiori exemplo erat PE noncuplum ipſius PB, ſit ergo etiam ſegmentum Globi HEA noncuplum dimidij Citrij, ab AEP circa PE immobilem deſcripti. Quæratur ſegmentum HEA. Erat AL 22, LK vel PE 27. Quadrata ergo ſunt 484. & 729. Cum autem areæ circulorum ſint vt radiorum quadtrata ad ſe invicem, & AC circulus ſupra habuerit 10050 23661 : venient in aream HPE, quç baſis eſt ſegmenti propoſiti, partes 15137 64977.

Et cum PA fuerit 3, & reſiduum ad diametrum 243, ſemidiamr 123. Vt ergò 243, ad 123, vel huius loco ad 100000, ſic 3 ad 1234 ſemis, augmentum altitudinis ſegmenti, pro altitudine Coni æqualis, idque in dimenſione uſitata Canonis: cum ſit altitudo ſegmenti PA, in hac dimenſione, 2439, Ergo altitudo Coni æqualis, 3673 ſemis, cuius pars tertia 1224 ſemis, ducta in aream baſis ſupra inventam, creat corpus ſegmenti 185 28483 31848. cujus pars nona eſt 20 58720 36872. Atqui ſupra corpus Citrij totius erat 36 &c, dimidium ergò 18 24638 77472, quod eſt quidem minus nona parte de ſegmento, minus etiam decimâ ejus, ſed in hac infida, circa minima, numerorum tractatione. Nam agitur de quantitate corporis, quod minus eſt quàm vicies milleſima Globi. Et oritur quidem differentia hujus corpuſculi (multò major eo de quo controvertimus) ex vnica centies milleſima particula ſemidiametri: quia ſinus arcus AE, hoc eſt PE fuit aſſumptus 21951, qui paulo erat major, minor tamen quam 21952. Quod ſi aſſumſeris 21952, & cum hoc repetieris proceſſum, corpus Citrij prodibit 42 47320 62579, cujus dimidium 21 &c, jam eſt majus nonâ parte ſegmenti hic inventi, nimirum quia etiam 21952 eſt major juſto. Per hos igitur

 nume-

numeros nihil depromi poteſt contra expreſſam in Theoremate proportionem dimidij Citrij ad ſuum globi ſegmentum.

THEOREMA XXVI.

Si recta quædam ſectionem conicam, & genitum ab illa ſegmentũ Sphæroidis, aut Conoides, contigerit in circumferentia baſeos, concurrens cum axe; & circumductæ lineę circa diametrum baſeos immobilem, creauerint ſolida, contingens quidem Conum, ſectiones vero Conicæ, Prunum Olivam vel Fuſum, quælibet ſuum congenere; eadem vero contingens, circumducta circa axem immobilem, creaverit Conum alium: proportio dimidij Pruni vel Olivæ ad Segmentum Sphæroidis, Fuſi vero ad ſuum Conoides, proxime erit æqualis proportioni prioris Coni, ad Conum poſteriorem.

In Schemate XII. ſit ſectio Conica OCN, ſuperius Parabole, in medio Hyperbole, infra Ellipſis, cuius axis CI, & ſectionis OCN dimidio CN circa ON immobilẽ circumacto, ſic ut punctum ſectionis N maneat, C verò per I transſeat, creatum intelligatur, Pruni, Olivæ vel Fuſi OCNI corpus dimidium CIN, Eodem ſectionis dimidio CN, circa CI immobilem circumacto, ſic, ut C manente, N per O tranſeat, creatum intelligatur ſegmentum Sphæroidis, aut Conoides OCN, vertice C, baſi circulo ON. Dico, ſi qua linea tangat ſectionem vel ſolidum in N vel O terminis, illa lineâ, Conos duos proxime tales creari, circumactibus iiſdem, qui jam ſunt dicti, ut in ijs conis inſit proportio dimidij corporis Pruni, Olivæ, vel Fuſi CIN, ad ſegmentum Sphæroidis, aut Conoides OCN. Hactenus ad declarationem Theorematis opus nobis fuit Schemate XII. Nunc reliqua ex Schemate XVIII. petentur.

Eſt enim Theorema, de ſegmento Sphæroidis, deq; binis Conoidibus, Parabolico & Hyperbolico; habetq; poteſtate in ſe partes tres, prima & ſecunda ſunt certæ, quod iſta proportio ſit minor illâ Theorematis præmiſſi; & ſecunda, quod aliqua proportio demonſtratur major; tertia nondum eſt certiſſima, quod præciſè ſit iſta proportio, quæ in Theoremate hoc exprimitur. Cum autem evidentiora ſint omnia in Hyperbolico, ſit ergo in Schemate XVIII. ſectio Conica quæ Hyperbola dicitur, FCG, linea punctis ſignata; eſt autem & arcus circuli per FCG deſcriptus; illum igitur Hyperbola ſecat in F; vnde circulus quidem verſus S, Hyperbola verò verſus R pergit, ſemper interior circulo, donec in C vertice tangat circulum interius; vt demonſtratum eſt in IV. Conicorum Apoll. Pr. XXV. XXVI. Fiat autem ex FCG Conoides, cujus vertex C, axis VCO, baſis FG circulus, ejuſq; ſemidiameter FO: & ſit V centrum figuræ, & VX, VZ aſymptoti, quarum ſectiones cum FG continuata, ſint X. Z. contingat autem figuram in F, circumferentiâ baſis, recta EY, quæ cum axe concurret inter V centrm

trum & C verticem, concurrat in Y. Inſcribatur autem figuræ ſuper eadem baſi FG, triangulum FCG. Itaq; cùm antea dimidij Citrij corpus, deſcriptum arcu circuli FSC, circa FO immobilem, ad ſegmenti ſphærici FCG corpus, deſcriptum eodem arcu FSC, ſed circa CO immobilem circumacto, proportionem eam habuerit, quæ eſt ipſius CO ad OF: jam hoc theorema de Fuſo dimidio, quod deſcribitur Hyperboles dimidio FRC, circa FO immobilem, deq; Conoide, quod eâdem FRC, ſed circa CO immobilem, deſcribitur, affirmat proportionem aliam, ſcilicet eam, quę eſt YO ad OF; hæc enim eſt proportio Coni, ab FY contingente, circa FO deſcripti, ad Conum ab eadem FY, ſed circa YO, deſcriptum. Manifeſtum autem eſt YO proportionem minorem eſſe ad OF, hoc eſt, æqualitati viciniorem, quam CO ad OF, cumq; concurrant VX & YF verſus partes X, rurſum igitur & ipſius VO ad OX minor eſt proportio, quàm ipſius YO ad OF.

Quemadmodum igitur YO ad OF eſt quantitate media inter CO, ad OF, & inter VO ad OX, ita demonſtrari poteſt, & Fuſi dimidij corpus ad Conoidis corpus, eſſe quantitate mediam proportionem inter CO ad OF & inter VO ad OX,

Probetur primùm de CO ad OF, valebit autem demonſtratio etiam de Parabolico Conoide. Igitur manifeſtum eſt, Fuſum lineæ FRC, minus eſſe Citrio arcus FSC: ſic etiam Conoides FRCG, minus eſſe Segmento Sphærico FSCG. Cùm autem figura plana, contenta inter arcũ circuli FSC & Hyperbolam FRC, ad partes F & C, ſit inæqualis latitudinis, circa F enim latior eſt, ubi lineæ ſe mutuò ſecant, circa C anguſtior, ubi ſe mutuò tangunt: tunica igitur, quam ſegmentum globi circumiecit Conoidi, craſſior eſt verſus baſin FG, tenuior verſus verticem C. Contra, tunica quam Citrium circumiecit Fuſo, tenuius eſt verſus baſin ad C, quam verſus verticem F. Non amittunt igitur proportionalia, Conoides & Fuſum, ſed plus Conoides, minus Fuſum. Etſi enim circa verticem viciſſim minus amittit Conoides, quam Fuſum circa verticem F: non fit tamen omnimoda compenſatio, quia partium ad verticem motus brevi ſpacio finitur, partium circa baſin motus, in ampliorem diffunditur ambitum. Fuſum igitur propius eſt Conoidi, quam Citrium Segmento Sphæræ, vel CO (per Th. præcedens) ipſi OF: quemadmodum etiam YO propior eſt ipſi OF, quàm CO ipſi OF.

Hic ſumus uſi Theoremate antecedenti, quod nondum habet demonſtrationem legitimam. Sed valet eadem methodus etiam tunc, ſi pro ſegmento FSCG, & citrio, Conos FCG ſubſtituamus. Conus enim à linea CF circa FO factus, ad Conum à linea eadem FC, circa CO factum, proportionem habet eam, quam CO ad OF. Iam verò figura plana, quæ continetur Hyperbola FRC & rectâ FC, creans exceſſum Conoidis & Fuſi, ſupra illorum Conos, latior eſt verſus C, quia ibi Hyperbola eſt curvior; anguſtior verſus F, ubi Hyperbola paulatim degenerat in rectum. Rurſum igitur Conis hiſce non adijciuntur proportionalia; plus enim accedit Cono Fuſi, ut fiat Fuſum in ſua proportione, quam Cono Conoidis, ut fiat Conoides: majus igitur eſt corpus Fuſi, reſpectu Coniodis, quam CO reſpectu OF, id eſt, minor & æqualitati propior eſt minoris (Fuſi) ad majus (Conoides) proportio,

Iam

Iam etiam de VO ad OX demonſtrandum, quod hæc proportio minor ſit proportione Fuſi dimidij ad Conoides. Eſt autem demonſtratio propria Hyperboles, cùm Parabola careat Aſymptotis. Rurſum igitur ut prius, figura contenta tribus rectis FX, XV, VC, & Hyperbolâ CRF, latior eſt verſus V, quàm verſus X: corpus igitur ſeu matrix, in qua latet Conoides, craſſior eſt in vertice V, quàm ad baſin XZ; viciſſim matrix, in qua latet Fuſum, eſt tenuior ad verticem FX, quam ad baſin circa VC: plus igitur accedit Cono, cujus axis XV, in ſua proportione, quàm Cono, cujus axis VO, in ſua. Maior igitur ille Conus eſt, reſpectu huius, quàm Fuſum reſpectu OX, minor igitur proportio VO ad OX, & æqualitati propior, quàm dimidij Fuſi ad Conoides.

Cùm autem inter proportiones, CO ad OF, & VO ad CX, infinitæ aliæ ſint proportiones intermediæ, non vna ſola quæ eſt YO ad OF: non igitur neceſſaria, ſed veriſimilis ſaltem eſt collectio in tertia figura argumentationis, affirmatoria ex puris particularibus.

Analogia.

Cogita num in Globi quidem ſegmentis ſemper valeat proportio Conorum inſcriptorum: in Sphæroidis verò, jam Coni illi, qui genuinam habent proportionem ſolidorum (puta hîc Pruni ad Sphæroidis lati, aut Olivæ, ad longi ſegmentum) alter verticem alter baſeos extremum ſupra verticem Ellipſis proferant, intra contingentem tamen; in Parabolico Conoide, hæc ipſa contingens creet Conos proportionis quæſitæ, ſic ut altitudo Coni unius, ſit præciſè dupla altitudinis ſegmenti Conoidis; in Conoide deniq; Hyperbolico, Vertex & Baſis Conorum horum, excurrant ſupra contingentem, verſus figuræ centrum. Magna quidem & prope demonſtrativa vis eſt huius Analogiæ.

Neq; tamen ſufficit hoc habere demonſtratum, oportet etiam ipſiſſima puncta indicare, inter contingentes & Verticem Ellipſis, aut Centrum Hyperboles.

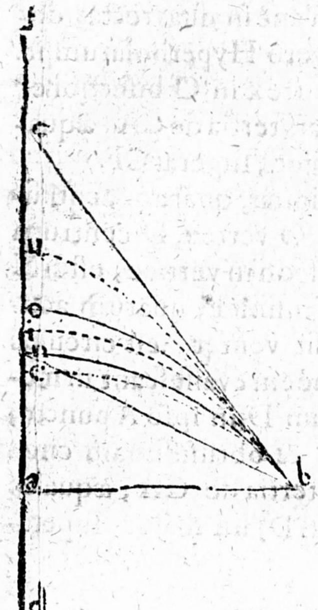
THEOREMA XXVII.

Si cuiuslibet Trianguli latus alterum circa rectum angulum, ſecetur & in duo æqualia, & in proportione laterum reliquorum: in angulo vero oppoſito concurrant ſectiones Conicæ variæ, communiter ſeipſas, & latus recto angulo oppoſitum, tangentes, Vertices primarios in latere ſecto habentes: quæ ſunt à ſummo ad medietatem, omnes erunt Hyperbolæ: quæ in ipſam biſectionem incidit, Parabole; quæ hinc usq; ad ſectionem proportionalem, omnis generis Ellipſes rectæ: quæ in ipſam proportiona-

tionalem incidit, circulus; quæ deniq; hinc uſq; ad rectum angulum, omnis generis Ellipſes tranſverſæ erunt, in quibus vertex impropriè dicitur, pro extremo axis brevioris.

Sit Rectangulum BAC, cuius latus AC ſectum ſit in æqualia in O biſecetur etiam angulus CBA, lineâ BN, ut ſicut eſt AB ad BC, ſic ſit AN ad NC. Erit propterea AN brevior ipſa AO. Tunc inter CO ſit punctum V; inter ON punctum I; inter NA punctum E: tangant autem ſe in vicem, & rectam BC, in puncto B, variæ ſectiones Conicæ, quarũ vertices ſint hoc ordine, V. O. I. N. E: dico BV eſſe Hyperbolas, BO Parabolen, BI Ellipſes rectas, BN circulum, BE Ellipſes tranſverſas.

Schema XVII.



Primò de BO. Cùm igitur ſectionem Conicam BO, cuius axis ſeu diameter CA, vertex O, tangat recta BC in B, conveniens cum diametro extra ſectionem in C, ſitq; à tactu B, ad diametrum ordinatim amplicata BA, quippe perpendicularis axi CA; & cùm ſit CO, æqualis ipſi OA: quare BO erit Parabole, per 37. Imi Apoll. converſam.

Secundò de BV. Manentibus cæteris, cùm ſit V vertex, & CV minor dimidio ipſius CA, dupla igitur ipſius CV auferatur à CA; & fiat ut reſiduum hoc ad CV, ſic CV ad CF in partes exteriores. Cùm igitur, quod ex CF & reſiduo dicto, æquet quadratum ipſius CV: addantur utriq; communia quadratum à CF, & bina rectangula VCF: ut ex vna parte conſletur rectangulum CFA; ex altera parte quadratum ab FV: quæ cùm ſint æqualia; quare per 37. I. Apollon. converſam, ſectio BV erit Hyperbole, cuius centrum F.

Tertiò de BI, BN, & BE. Manentibus ſuperioribus, cum ſint I, N. E. vertices, & IA, NA, EA minores quàm dimidium ipſius CA: duplæ igitur ipſarum IA, &c: auferantur à CA; fiantq; ut reſidua hæc ad IA &c: ſic hæc ad AD, in partes interiores: de reliquo demonſtrabitur eadem methodo, ut priùs, quadrata ab FI &c. æqualia eſſe rectangulis CDA, ac proinde per eandem Apollonij converſam, ſectiones Conicæ BI, BN, BE erunt finitæ, quarum centra D, intra figuras, eoq; Ellipſes, aut circulus.

Quartò de BN, præſuppoſitis quæ iam tertio loco de ea ſunt demonſtrata; cùm inſuper AN ſit ad NC, ut AB ad BC, quæ eſt proportio unica in vno quolibet triangulo, cùm Hyperbolæ & Ellipſes varias habeant proportiones, Parabole unicam quidem, ſed proportionem æqualitatis: non poterit igitur BN eſſe ulla alia ſectionum conicarum, præterquam circulus. Et ſanè ita fit in circulo. Sit enim BN circulus, eiusq; centrum F, quod con-

nectatur cum puncto B contactus; erit ergo CBD rectus, ſed & CAB rectus erat; ergo ut CA ad DB, ſic DB, hoc eſt DN ad DA. Atqui DN eſt ad DA, ut CB, ad BA, & ut CN ad NA. Circuli igitur arcus ſecat latus, in quo continuato centrum habet, in proportione laterum AB, BC.

Corollarium & Analogia.

Hyperbolæ igitur in hoc triangulo poſſunt eſſe infinitæ, quarum obtuſiſſima, ut loquar analogicè, eſt BC, cuius vertex V, & centrum F, in ipſum C, angulum Aſymptôton coincidunt; ipſaq; ſectio planè in duas rectas degenerat (cono ſc. per verticem ſecto) acutiſſima verò Hyperbolarum in hoc triangulo, eſt analogicè ipſa Parabola, cuius vertex in O biſectione, centrum F, in infinita diſtantia. Quod ſi CV ſit pars tertia de CA, æquales fient CF, CV; ſi CV minor, ſuperat CV, ſin major, ſuperat CF.

Sic Ellipſes rectæ BI, inter ON tranſeunt infinitæ, quarum acutiſſima in vertice, eſt analogicè ipſa Parabole BO, cuius O vertex, D centrum in infinito intervallo, obtuſiſſima verò harum Ellipſeon in vertice, eſt BN circulus. A quo incipiunt Ellipſes tranverſæ rurſum infinitæ, quarum acutiſſima circa verticem (impropriè dictum, cum ſit venter) eſt circulus ipſe ON, ex eo obtuſiores BE, ſemper, donec tandem evaneſcant in meram rectam BA, verticem inproprium E, & centrum D, in ipſo A puncto, verticem verò propriè dictum in B habentem, & obtuſiſſimam circa A, quippe merè rectam. Quod ſi AE ſit pars tertia de CA, æquales fient EA, AD; ſi verò EA minor, ſuperat ipſam AD, ſin major, ſuperatur ab illa.

Corollarium II.

Hinc, nimirum ex contingentibus, facile fit judicium de ſpecie Truncati. Nam ſi duæ truncatum contingentes in punctis circumferentiarum truncantium, in Schemate XVIII. in G. F. rectæ FY, GY; mutuam ſectionem Y fecerint talem, ut YC ſit æqua ipſi CO dimidiæ differentiæ circulorum, medij & truncantis: erit Fuſi Parabolici truncus, ſin CY minor, Truncus erit Hyperbolico Fuſo, ſin major, ex Prunorum primò, dein ex Citriorum (ſi fuerit YF ad FO, ſic ut YG ad CO) deniq; ex Olivarum Ellipticarum genere: ut ſi ſit CY dupla ipſius CO.

Schema 18.

THEOR. XXVIII.

Si quatuor ſpecies ſectionum Conicarum, Circulus, Ellipſes, Parabola, Hyperbolæ, ſeſe in communi vertice contingunt, prætereaq; in duobus alijs punctis, æqualiter à vertice remotis, concurrunt; omnes in iis duobus

punctis

punctis ſecantur ab omnibus, & circumferentia circuli intra ſectiones eſt exterius, continetq; Ellipticas, hæ Parabolicam: intimæ ſunt Hyperbolicæ, & ex iis interiores, quæ obtuſiores, eædemq; ſuis Aſymptotis propiores.

Cùm enim ponantur ſectiones diverſæ ſpeciei, & diſſimiles etiam unius ſpeciei, non poterunt igitur habere partes eaſdem; ſed aut contingent ſe mutuò in vnico puncto, aut ſecabunt ſeſe mutuò, arcus verò inter puncta interjecti diſtabunt ab invicem toti à totis, per XXIV. quarti Apollonij. Et cùm ponatur, omnes ſeſe mutuò contingere in Coni vertice, concurrere verò etiam ad alia duo puncta: nulla igitur earum cum ulla reliquarum in aliis pluribus punctis concurret, etiamſi Parabola & Hyperbolæ in infinitum continuentur, per XXVI. quarti Ap. Cùmq; ponantur concurrere in tribus punctis: non igitur ſeſe contingent in eorum punctorum duobus; Nam ſi in duobus ſeſe contingerent, in tertio non concurrerent, per XXVII. quarti Ap. Sequitur ergò, ut concurſus duo reliqui ſint ſectiones; omnis enim concurſus aut contactus eſt, aut ſectio. In ſectionibus autem permutatur ordo.

Et cùm ponantur puncta tria in circumferentia circuli, circulus igitur per illa tranſibit unicus, per demonſtrata lib. III. Euclidis. Similiter & Parabola erit vnica Pone enim diverſas eſſe; & cùm poſitum ſit, contingere ſeſe in Coni vertice, ſi diverſæ ſunt, & ſeſe ſecant, diverſas etiam contingentes habebunt in communi ſectione: quare eadem demonſtrationis methodo, qua utitur XXVIII. quarti Ap. probans, duas parabolas ſeſe non contingere in pluribus uno punctis, res ad impoſſibile recidet, & totum fiet æquale parti. Non ſunt ergò diverſæ Parabolæ, ſed vnica, quæ per tria puncta tranſit.

Cùmq; Hyperbolæ, quo obtuſiores, hoc magis exteriùs procurrant ultra ſectiones, ut eſt per ſe manifeſtum; ergo intra ſectiones neceſſe eſt eſſe tanto interiores: Et quia ex ſimilibus Hyperbolis, ſc. eodem angulo Aſymptôton factis, illa maior cenſetur, quæ maioribus lateribus formatur: Obtuſæ igitur hic ſunt minores in ſua ſpecie, quam acutiores in ſua: duobus igitur nominibus, interior habet Aſymptotos viciniores, & quia minor in ſua ſpecie, & quia reſpectu ſociæ obtuſior: obtuſiores enim, ut præcedenti Theo: dictum, magis magisq; appropinquant ſuis Aſymptotis, tandemq; cum iis coincidunt. Quin etiam hoc demonſtratum eſt Theoremate præcedenti, centrum in obtuſiorum aliquà ſerie, propius eſſe contingenti, quam hæc eſt vertici, in reliqua acutiorum, remotius. Et verò contingens, interiori eſt ipſa etiam interior. Poteſt hoc etiam abſolutè demonſtrari per 37. I. Apoll. Sic cum Hyperbolæ exterius complectantur Parabolam: intra ſectiones igitur, Parabola viciſſim complectetur illas; eâdem de cauſa, cùm Parabola extra ſectiones complectatur Ellipſes, intra igitur ſectiones, Ellipſes viciſſim includent Parabolam. Deniq; cùm circulus Ellipſes tangens in vertice, ponatur eas ſecare duobus locis: Lunulæ igitur Ellipticæ reſecabuntur à circulo, & conſiſtent extra circulum: ante ſectiones igitur, arcus Ellipſeon erunt intra arcum circuli.

THEOREMA XXIX.

Si Citrium, Pruna, Fuſum Parabolicum, Fuſa Hyperbolica, & Conus duplicatus, omnia truncata, habuerint eosdem circulos, tam truncantes, quam medium corporum: Citrium erit maximum, reliqua eodem ordine magnitudinis corporum, quo hic ſunt recenſita.

Demonſtratur facile ex antecedenti. Nam Citrium creatur ſegmento circuli, Pruna ex ſegmentis verticalibus Ellipſeon, Fuſa ex ſegmentis verticalibus Paraboles, & Hyperbolarum, Conus duplicatus ex Triangulo Iſoſcele. Cùm autem corpora ſtatuantur habere eosdem circulos truncantes: arcus igitur omnium linearum creatricum ſeſe mutuò ſecabunt in punctis duobus, per quæ circuli truncantes tranſeunt. Et cùm idem omnibus corporibus tribuatur circulus maximus corporis medius: ergò lineæ creatrices omnes ſeſe mutuò tangunt in communi vertice, qui ex circumductu figuræ cujusq; creat illum circulum totius corporis medium. Cùm autem ſectiones Conicæ ſeſe mutuò amplectantur ordine hic attributo: ſegmenta etiam ſeſe mutuò excedent eodem ordine. Conus igitur duplicatus & truncatus (in Schemate XVIII. rectis lineis HAE GCF contentus) erit minim9: Ei primùm Hyperbolæ ſingulæ ſingulas tunicas circumducent, ut fiant Fuſa Hyperbolica truncata; ſuperinducet & Parabole unam, ut fiat Fuſum Parabolicum: tum Ellipſes ſingulæ rurſus addent ſingulas, ut fiant Pruna Elliptica truncata. Tandem Circulus, arcu FSQGG ultimam induet ei tunicam, facietq; Citrium truncatum.

TH. XXX. Problema Geometris propoſitum.

Proportionem indagare ſegmentorum Citrij, Olivæ, Pruni aut fuſi, factorum plano axi parallelo.

Vſus eius non poteſt eſſe obſcurus, ſcientia deeſt. In extenſione verò ſoliditatis Citrii in rectum, ſc. in Priſmatis cylindrici portionem, reſpondet tali ſegmento Citrij, ſegmentum portionis illius cylindricæ, factum ſuperficie, quæ ſimilis eſt cylindraceæ, ſeu potius parti involutæ chartæ quodammodo: nam in unam plagam eſt recta, & rectæ in baſi portionis Cylindraceæ parallela; ſurſum verò eſt curva, non tamen curvitate neq; circuli, quod certum eſt, neq; ſectionis conicæ, quantum mihi conſtat: etſi inter conicas, Ellipticæ ſit ſimilior, quia ſuperius magis flectitur. Et ſi de huius curvitatis lineâ conſtaret; nondum tamen ex ea, per hactenus quidem conſtituta, daretur ſoliditas talis portionis.

Concluſio huius Supplementi.

Age nunc, SNELLI, Geometrarum noſtri ſæculi decus, legitimam hujus Problematis, cæterorumq; quæ hic deſiderantur demonſtrationem nobis expedi: reſervatur, ni fallor, hæc inventio Tibi, ut exiſtat Mecœnatum aliquis, qui tuæ fortunæ ſplendorem reputans, & verecundiâ inſtigatus, dignum aliquid hac ſollertia, quo ſcilicet notabilis aliqua tuæ rei ſiat acceſſio, remuneretur, proq; Citrio numerico, Malum aureum rependat.

II. Pars.

STEREOMETRIA DOLII AVſtriaci in ſpecie.

AD QVOD GENVS FIGVRARVM PRÆMISSARVM pertineat figura Dolij Auſtriaci.

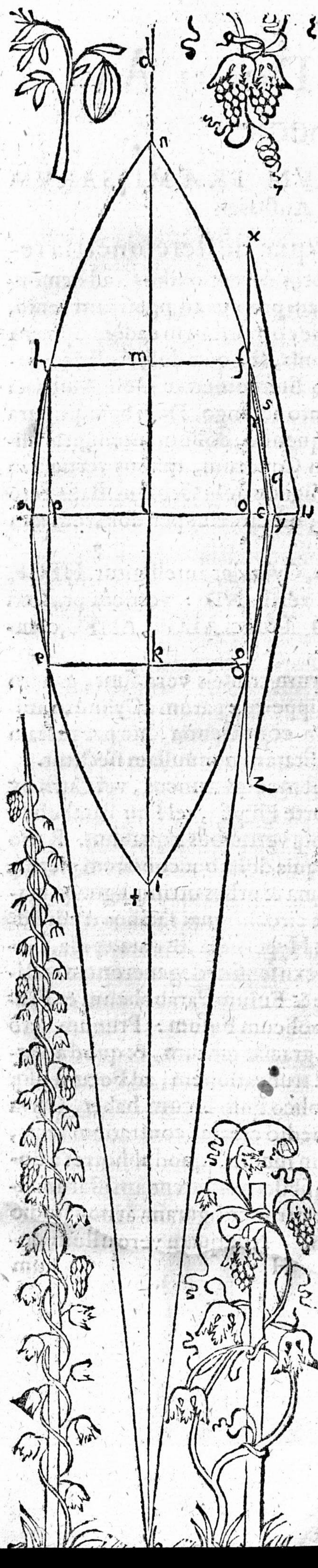
Præmiſſis igitur generalibus, quæ de ſtereometria regularium tam ex Archimede quam ex proprijs inventionibus, ad demonſtrationes intelligendas vtilia videbantur, jam propius ad ppoſitum venio, multaq; ab Archimede itidem non tacta, de corporibus in eadem Sphæra Parallelepipedis, eorumq; Cylindris & Conis, ſed quæ dolij Auſtriaci naturam vnicè attinere videbantur, ſub titulo Stereometriæ Dolij Auſtriaci infero, & præmiſſo Archimedis ſupplemento adjungo. Dolij namq; figura eſt Cylinder ventricoſus; ſeu accuratiùs loquendo, dolium intelligitur diremptum in duos veluti Truncos duorum Conorum, quibus vertices in contraria vergentes, intelliguntur præſecti ligneis dolij Orbibus, Baſis verò communis, diviſionem Conorum faciens, eſt circulus per dolij ventrem ampliſſimus.

In Schemate XVIII. hic ſubjuncto, Cylinder intelligitur HEGF, Conus ABC, & alter huic æqualis ab AC verſus ND: vertices præſecti EBG, & æqualis illi alter ab HF, verſus ND. Trunci AEGC, AHFC, communis baſis AC.

Quæ igitur de Cylindris & de Conorum truncis vera ſunt, eadem etiam ad figuram dolii poſſunt applicari, quippe quæ parum à Cylindro, minusq; à trunco conico abit, dum aſſerum conniventia, hic per rectam CRF intellecta, extrorſum verſus, in buccoſitatem nonnullam flectitur.

Accuratiſſimè, omnis dolij figura, eſt medius truncus, vel Citrii ex circuli ſegmento, vel Pruni ex verticali parte Ellipſis, vel Fuſi Parabolici, plerumq; verò Hyperbolici, præſectis utrinq; verticibus æqualibus. Ratio cur Fuſum Hyperbolicum dicam, eſt hęc; quia dolia buccoſitatem plerũq; recipiunt in ventrem medium: verſus extrema & orbes utrinq; ligneos, magis ad rectitudinem conicam accedunt, ut circuli lignei facilius trudi adſtringiq; adigendo poſſint. Hoc verò facit & Hyperbola, & nata ab illa, Conoides & Fuſum, ut brachia eius à medio flexu ſenſim degenerent in rectitudinem Aſymptôton. Facit idem ex parte & Fuſum Parabolicum & Prunum Ellipticum, ſed evidentiſſimè Hyperbolicum Fuſum: Prunum verò Ellipticum minus minusq; nec omne, ſed gracile tantum, & quod à ſegmento verticali Ellipſis eſt, cuius axis poſt truncationem, ad Focum uſq; non pertingat: quæ cautio etiam in Parabolico Fuſo locum habet. Oliva verò, ex Ellipſis ſegmento inter vertices medio creata, contrarium facit, nam verſus extrema magis flectitur, quàm in medio, quod abhorret à dolij figura. Etſi non negaverim propter inſenſibilem differentiam iſtarum figurarum, eſſe dolio quandoq; etiam ex Olivæ trunco figuram; at non ſtudio artificis, ſed aberratione manus conſtitutam. Nunquam vero ullum dolium

Schema XVIII.



lium conſtitutum puto ex ventre Sphæroidis Archimedei; quam, ut veræ proximam (nondum notis aliis, quarum geneſin ſupra docui) CLAVIUS ſubiecit: paratus tamen interim (verba Clavij) ſi quis accuratiorem invenerit, eam libenti animo & grato acceptare. Nam Sphæroidis longi, quod in medio juſtam & dolijs aptam habeat buccoſitatẽ, flexura verſus truncatos vertices nimia eſt, nec ulla vincula in ea poſſent diu hærere. Sin autem ſumſeris medium ventrem ſphæroidis valde gracilis; minues quidem hoc incommodum flexuræ nimiæ in extremitatibus dolij, at viciſſim ventrem dolio nullum permittis, ac ſi ex puro puto Cylindro illud conſtrueres.

In hac igitur figura, duo arcus HAE, FCG, circuli cuius diameter æqualis ipſi BT, deſcribunt truncatum Citrium, cuius vertices truncati ſunt HNF, EIG. Linea verò punctis notata, inter rectam FRC & arcum FSC, Fuſum denotat Hyperbolicum, cuius Hyperboles vertex C, centrum V, Aſymptoti VX, VZ. quarum rectitudinem Hyperbola CF, verſus F magis magisq; affectat, & hîc à contingente ſua FQY, ſecante arcum FSC in Q, difficulter diſtinguitur.

Quâ ratione quis Virgam menſoriam falſitatis arguere poſſit; & quomodo fides ejus aſſeratur.

Igitur ut ad exordium disquiſitionis huius revertar, Elenchus meus Virgæ Menſoriæ primum erat hic, quod eadem eius longitudo A F diſſimilibus figuris doliorum competeret, quarum tamen non eſſent æqua ſpacia.

Vt hanc rem in plano demonſtrarem: viſum eſt, pro Cylindri corpore, aſſumere Parallelogrammum, quo Cylinder per

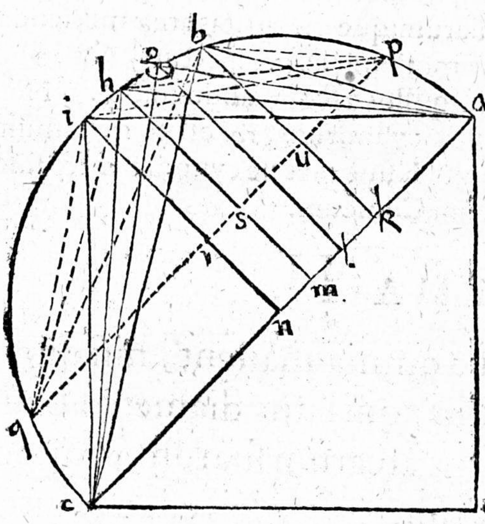
per axem ſecatur. Nam quæ de Cylindro vera ſunt, ea etiam Trunco conico AHFC, eiuſq; Trapezio, quod illum per axem ſecat, ſc. de plano AHFC, in quod etiam AF virga menſoria incidit, applicari poſſunt. Nam planum hoc cum cylindri corpore & creſcere & minui videbatur. Sit igitur hac de re

THEOREMA I.

Cylindrorum rectorum ſectiones per Axem, quæ diagonios habent æquales, niſi proportio Diametri baſis ad altitudinem fuerit eadem aut permutata, inæquales habent areas: eſtq; inter has illius area maxima, quæ ſecat Cylindrum æquealtum diametro ſuę baſis.

Eſto Baſeos Cylindraceæ diameter CI, altitudo cylindri IA. æqualis Diametro Baſis, repræſentans jam dimidium Dolij Vinarij; ſectio Cylindri ſit AICO Rectangulum, quod hic eſt quadratum, linea diagonios AC, repræſentans Virgam menſoriam ab infuſorio Orificio A, ad orbis lignei IC, calcem C, tranſverſim deſcendens. Et quia cylinder præſupponitur Rectus, erit CIA angulus rectus. Biſecetur AC in N, & centro N, ſpacio NA ſcribatur ſemicirculus AIC, qui per I tranſibit, quia AIC rectus. Et quia AI, IC æquales, erunt igitur arcus AI, IC, quadrantes circuli; & connexis punctis N, I, anguli INA, INC erunt recti, & IN perpendicularis in AC.

Schema XIX.



Eligantur jam puncta quæcunq; unius quadrantis: & ſint verbi gratia H, B, connectanturq; cum terminis diametri A. C. lineis HA, HC, BA, BC: ſic, ut manente eadem diagonio AC, quadratum AICO, vel eius pars dimidia, ſc. triangulum AIC, mutetur in alias figuras AHC, ABC, angulo I manente recto, etiam apud H & B, quippe omnibus in ſemicirculo eodem conſtitutis; ut ita AHC, ABC, ſint iterum rectorum Cylindrorum ſectiones dimidiatæ, ſintq; jam diametri Baſium CH, CB, altitudines Cylindrorum HA, BA.

Dico aream AIC eſſe maximam, AHC minorem, ABC (puncto B remotiori ab I quadrantis termino) iterum minorem.

Demittantur enim à punctis H. B. perpendiculares in diametrum AC, quæ ſint HM, BK. Igitur per demonſtrata Euclidis, area cuiusq; trianguli æquat Rectangulum ſub dimidia baſi AC, & altitudine triangulorum, ſc. NI, MH, KB. Quare ut IN ad HM & BK, ſic AIC area ad AHC,

AHC, & ABC areas. At in quadrante AI, omnes Rectæ, parallelæ ſemidiametro IN, vt ſunt HM BK, ſunt minores ipſa ſemidiametro IN, & minor BK, remotior ab illa, quam HM propinquior illi. Minor igitur eſt area AHC, quam AIC, iterumq; minor ABC, quam AHC. Rectangula igitur horum triangulorum dupla, ſunt eodem ordine maiora.

Dico etiam Cylindris, qui proportionem altitudinum ad diametros Baſium habent permutatam, eſſe ſectiones æquales.

Eſto enim AB diameter Baſis, & BC altitudo Cylindri: patet, triangulum ABC, quod eſt dimidia ſectio Cylindri per axem, manere idem quod antea, cum BC eſſet diameter Baſis, & AB altitudo, eoq; proportio harum linearum permutata.

Porrò non celandus eſt error in quem me conjecit primo die ſupina Theorematis huius conſideratio. Nam hæc commemoratio admonebit lectorem, ut à ſimilibus ſibi caveat etiam alibi. Sic enim ſum ratiocinatus perperam: Cùm arearum ſimilium proportio ſit dupla proportionis laterum, Corporum verò ſimilium tripla: fore etiam in diſſimilibus, eâdem tamen diagonio AC utentibus, corporum proportionem, proportionis arearum linearumq; ſemper analogam. Hoc verò falſum eſt: et ego ſi victoribus id conſilij dediſſem, ut ſemper diametrum orbis lignei conſtituerent ſubduplam longitudinis Tabularum; quod ſecuritas areæ metiendæ requirit, ac ſi etiam ſecuritati corporis metiendi ſic proſpectum eſſet: plurimum ipſorum arti nocuiſſem, longiusq; illos à ſcopo abduxiſſem. Non enim ubi maxima eſt area plani, ſecantis cylindrum, ibi eſt & maximum cylindri corpus. Sed id poſtea apparebit; Nunc quæ de cylindro recto ſunt dicta, accommodabo etiam ad Truncum Conicum.

THEOREMA II.

In Truncis Conicis reliqua omnia manent, niſi quod inter truncos proximos ab illo, qui latus diametro baſis habuerit æquale, plus variatur arearum ſuarum proportio, quàm ſi Cylindri pro Truncis Conicis eſſent, inter truncos remotiores minus.

Cùm enim angulus comprehenſus à latere Trunci, & à diametro baſis minoris, ſit maior Recto, competet non in ſemicirculum, ſed in arcum ſemicirculo minorem. Ducatur igitur ipſi AC parallela PQ, ſecans ſemicirculum in punctis P, Q, & perpendiculares IN, HM, BK, in punctis R. S. V. & connectantur puncta I. H. B. cùm punctis P. Q. Repræſentat igitur jam PQ Virgam menſoriam, QI, QH, QB diametrum baſis detruncati Coni; IP, HP, BP, latus trunci, dimidia longitudo Tabularum in dolijs: & anguli QIP, QHP, QBP obtuſi & æquales inter ſe, quippe in eodem ſegmento PQI ſtantes, cauſam præbent æqualem per has omnes figuras, variationis eius, quam hic explicandam ſumpſi.

Rurſum igitur area PIQ, eſt ad aream PHQ & PBQ, ut IR, ad HS, & BV: cùm igitur ab inæqualibus IN, HM, ablata ſint æqualia RN & SM: reſi-

reſidua IR & HS erunt in ꝓportione maiori: magis igitur eſt ſenſibilis differentia arearum PIQ, PHQ, quam areaꝛ AIC, AGC. Contra decrementa perpendiculariũ ſunt maxima apud A: minora igitur erunt apud P. Et apud P evaneſcunt perpendiculares Truncorum, apud A verò evaneſcunt perpendiculares Cylindrorũ: minori igitur ꝓportione decreſcunt areæ PBQ, propiores fini P: quàm areæ ABC, propiores fini A. At prius propiores initio I, maiori proportione decreſcebant PHQ, quam AHC. Hoc theorema præcipuè notabile eſt propter hallucinationem aliam diuturniorem, circa comparationem Truncorum conicorum inter ſe, cuius infra fiet mentio.

Porrò elenchum hallucinationis dictæ continet ſequens

THEOREMA III.

Cylindrorum Rectorum, quorum ſectiones habent eandem Diagonium, Corpora non habent inter ſe proportiones analogas proportionibus Arearum, quibus ſecantur per Axem: nec cujus eſt maxima ſectrix area, eiuſdem & corpus maximum eſt.

In Schemate priori, cum AIC ſit dimidium areæ IO, ſecantis Cylindrum IO per axem, IC Diametrum Baſis: ductâ igitur AICO area in IC Diametrum Baſis, creatur parallelepipedum Rectangulum, quod Cylindrum ſtringit. Vt igitur 14 ad 11, ſic hoc parallelepipedum ad cylindri ſui corpus. Per III. præmiſſæ ſtereometrieæ Regularium. Ergo in qua figura, ex ijs, quæ habent eandem diagonion AC, maximum eſt hoc parallelepipedum, ibi & Cylinder eſt maximus. At in figura cuius AIC eſt dimidia ſectio, non eſt maximum hoc parallelepipedum, quantumvis area ſectrix AICO ſit maxima: quod ſic demonſtro.

Sit in quadrante IA punctum H, proximum puncto I, quippe ad finem Quadrantis. Cùm ergo AHC ſit alia figura, quam AIC, & habeat eandem cum illa diagonion AC, ſint vero AIC, AHC areæ ad ſe in vicem, vt perpendiculares earum IN, HM: erunt in fine quadrantis inter ſe in minima proportione, & proximè æquales, quia etiam lineæ IN, HM intervallo certo inter ſe remotæ, in minima ad invicem ſunt proportione; quæ proportio inter eaſdem ſemper evadit maior, quo propius illæ ad A initium quadrantis, eodem inter ipſas intervallo manente, acceſſerint.

Atqui, ut corpus creetur, lineæ CI, CH ducendæ ſunt in areas AIC, AHC, & per æquipollentiam, ut Rectangulum ſub NI, IC, ad Rectangulum ſub MH, HC, ſic corpus Parallelepipedi AICI, ad corpus AHCH; atqui maior eſt ꝓportio HC ad CI, quam IN ad HM. Nam CI ſubtendit quadrantem CH, paulo plus, & ipſarum dimidia ſunt perpendiculares dimidij quadrantis & paulò plus: illæ verò non ſunt in minima inter ſe ꝓportione, quippe quæ in medio quadrantis maior eſt quàm in fine, eodem utrinq; perpendicularium intervallo ſuppoſito. Ergò exiſtente eodem perpendiculariũ intervallo, quod ſit dimidium arcus HI, perpendiculares circa finem quadrantis I, ſunt in minore proportione, quam dimidiæ CI, CH circa medium quadrantis, diſtantes etiam dimidio arcus HI. Et cum dimidiarũ CI, CH differentia ſit maior; quàm perpendiculariũ ad I, quæ dimidio arcus HI diſtant,

ctarum igitur CI CH differentia, prioris duplex, erit maior quàm perpendicularium IN, HM, toto arcu HI diſtantium. Ita conficitur, maiorem eſſe differentiam inter IC & CH, quam inter HM & IN. Itaq; etſi HM ſecundæ figuræ eſt paulo minor quam IN primæ: viciſſim tamen CH ſecundæ figuræ eſt multo maior quàm CI primæ. Majus eſt igitur Rectangulum MHC, quàm NIC, & ſic maior Cylinder, eiuſq; parallelepipedum AHCH, quam AICI cùm è contrario ipſius Cylindri AHCH, area ſectrix AHC, minor antea fuerit, quam AIC. Non eſt igitur proportio Corporum AICI, AHCH analoga proportioni arearum AIC, AHC. Et AIC quidem eſt maxima arearum ſuper eadem diagonio, corpus verò AICI non eſt maximum, ſed AHCH eſt eo maius.

Praxis & per eam ſucceſſus.

Cùm corpora ex I adhuc creſcant verſus H, inquiſivi logiſticè, ubi eſſet corpus maximum; non enim creſcit corpus continuè uſq; in A, ſed in vicinia ipſius A, turſum attenuatur, & unâ cum area ABC, tandem in A, in nihilum redigitur, quando altitudo Cylindri, analogicè loquendo, punctum eſt, ſc: A, diameter verò Baſis AC, cioncidens cum diagonio.

Proceſſus hic fuit: ſinum arcus AH, AB, multiplicavi in ſinum dimidij arcus HC, BC, per omnes quadrantis gradus ordine.

Cùm autem ſit tædioſa multiplicatio ſinuum, accipe proceſſum breviorem: ſit diagonios 20, quadratum 400, ſit altitudo AG 1, quadratum 1, hoc ablato à 400, reſtat quadratum ipſius GC 399: quod duc in altitudinem, venit 399, pro corpore huius columnæ, in comparatione cum cæteris.

Hoc pacto ſi fuerit

Altitudo	Baſis diameter	Erit corpus columnæ
1	20--	399
2	20--	794
3	20--	1173
4	20--	1536
5	19+	1875
6	19+	2184
7	19--	2457
8	18+	2688
9	18--	2871
10	17+	3000
11	17--	3069
Sub ſe-	midupla	3080
12	16.	3072
13	15+	3003
14	14+	2856
Æqu-	ales	2828
15	13+	2625
16	12.	2364
17	11--	1887
18	8+	1368
19	6+.	741
20	0.	0

Sed in priori proceſſu attendi, ubi primùm conſiſterent quotientum, ſeu corporum, incrementa; ab eoq; termino iterum decreſcerent; illos igitur ſinus notavi. Quos cùm interpoſitâ vna nocte repeterem ſub aſpectum; apparavit, G punctum circumferentiæ, apud quod maximum corpus terminabatur, connexum cum AC, præbere GA, latus cubi in Sphæram AIC inſcripti, & GC, diagonium plani cubici, ſeu latus Tetraedri in eadem. Id igitur ſequentibus Theorematibus demonſtrabitur. Et nota quod hiſce Theorematibus tradatur

Ratio ꝓportionis uſitatæ in fabrica dolij Auſtriaci.

THEOR. IV.

Omnium Parallelepipedorũ ſeu

ſeu columnarum inſcriptarum ſphæræ eidem, quæ binis ex oppoſito quadratis Baſibus conſtant, Cubus eſt maximo corpore.

Theorema eſt hactenus deſideratum: etſi habet dixin evidentem ex Analogia. Circulus eſt omnium planorum, æqualibus perimetris contentorum, capaciſſimum, ut demonſtravit Pappus, libro V. Sed & planorum æquali laterum numero contentorum, & æquali perimetro, quæ ſunt circuli ſimiliora, capaciora ſunt.

Rurſum & ſegmentorum ex diverſis circulis, quorum circumferentiæ ſunt æquales, capaciſſimum eſt, ſemicirculus.

Ad eundem modum & Cubus eſt ſolidorum omnium, quæ æqualibus cum illo, ſuperficiebus continentur, capaciſſimus. Et Polyedrorum Iſoperimetrorum, quo fuerit quodlibet Sphæræ ſimilius, ordine & numero laterum: hoc capacius eſt: Icoſaedron quidem capaciſſimum, quia plurimis Baſibus contentum, ut circulus infinitis quaſi Baſibus. Hæc omnia Pappus habet libro V.

Sed & de ſegmentis diverſorum globorum, Iſoperimetris demonſtravit Archimedes, capaciſſimum eſſe Hemiſphærium omnium globi ſegmentorum, quæ æquali ſuperficie contineantur.

Hæc quidem præſtat figuris cæteris, circuli & globi natura, cùm ſunt Iſoperimetræ. Quando verò remittitur ijs æqualitas ſuperficiei, viciſſimq; datur Polyedris eadem ſphæra circumſcripta; contrarium contingit nonnullis, ut Dodecaedron ſit maius Icoſaedro, quod demonſtrarunt Apollonius & Hypſicles ad Euclidem: at hoc propter eandem globi naturam accidit, & propter ſimilitudinem figuræ cum globo, quæ hic regnat. Prius enim cum æquales eſſent ſuperficies, ſimilitudo cum globo conſiſtebat in multitudine ſuperficierum: Hic cum angulorum in varijs figuris ponatur orbis æqualis, & diſpoſitio per illum ordinata: ſimilitudo cum globo conſiſtit in multitudine angulorum, quæ maior eſt in Dodecaedro, quàm in Icoſaedro.

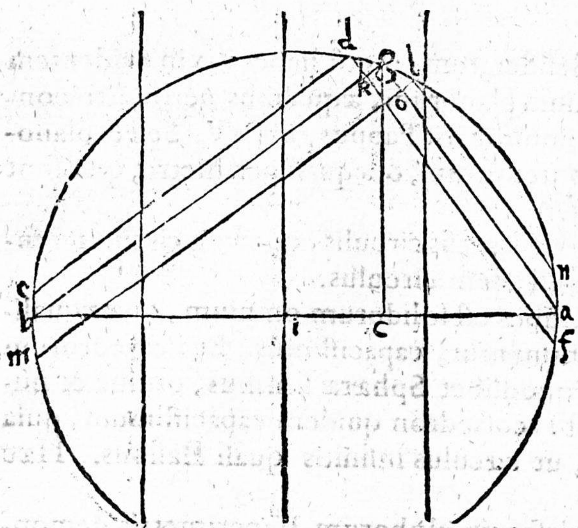
Cùm hæc ſic habeant, facile apparet, etiam inter corpora, quæ planorum æquali numero continentur, id eſſet capacius in globo, quod eſt globi ſimilius: Vbi ſimilitudo conſiſtit in æqualitate & ſimilitudine ſuperficierum, & ordine angulorum. Hæc igitur Cubo adſunt, præ reliquis globi Parallelepipedis. Quare Cubus erit capacior. Hæc quidem dixis eſt ex Analogia, Nunc plenam ſubijcio demonſtrationem, quæ ſanè difficultatem aliquam habet ex eo, quod ſolidi ſectiones minutæ concipiendæ ſunt in Schemate plano.

In Schemate proximè ſubjecto ſit Sphæræ circulus maximus AGB, diameter huius, idemq; & axis ſphæræ AB, & ſit Latus Cubi in Sphæra AG, diagonios unius qnadrati Cubici GB. Columnæ igitur binis quadratis Baſibus, quæ ſphæræ eidem inſcribuntur, aut ſunt altiores Cubo, Baſeſq; quadratas Cubicis minores habent, aut ſunt humiliores Cubo, Baſibus quadratis laxioribus.

Sit

Sit primò Columna altior Cubo. Ducatur igitur ipſi GA altitudini Cubi, parallela longior in circulo quæ ſit DF, ſecans GB in K: Similiter & ipſi GB, diagonio quadrati Cubici, ducatur parallela ex puncto D, fine altitudinis columnæ, quæ ſit DE, diagonios quadrati Columnaris, dico columnæ FDE corpus, eſſe minus corpore cubi AGB. Eſt enim DK ad BK, ut GK ad KF; & viciſſim ut FK ad KB, ſic GK ad KD: ſed AG eſt minor quam FK, & GB eſt maior quam KB. Maior eſt igitur proportio AG ad GB, quam FK ad KB. Maior igitur eſt earundem AG ad GB, proportio, quam GK ad KD: ſed AG ad GB eſt proportio ſub-ſemidupla. Minor igitur eſt proportio GK ad KD, quam ſub-ſemidupla, & GK vel plus poteſt dimidio ipſius KD, vel æquat KD, vel ea etiam longior eſt.

Schema XX.



Facta verò eſt appoſitio ad corporis cubici altitudinem per ductum duorum quadratorum columnarium utrinq; in particulam altitudinis KD. E contrario facta eſt diminutio à corporis cubici craſſitie, per ductum quatuor Quadratorum, columnaris æqualium, circa corpus columnæ, in particulam decrementi, quâ ſemilatus quadrati cubici differt à ſemilatere quadrati columnaris: quod decrementum eſt ad GK decrementum ſemidiagonij, ut AG ad GB, nimirum eius ſub-ſemiduplum. Neq; tamen hic expreſſa eſt omnis diminutio, quia quatuor hoſce laterculos ſpeciei quadratæ, minoris, quam eſt quadratum cubicum, circumjacent adhuc duodecim columellæ, quæ itidem de craſſitie cubi ſunt diminutæ. Quod ſi laterculi quatuor circa columnam, diminuti de corpore cubi, maiores ſunt laterculis duobus ſupra & infra adjectis ad corpus cubi; multò magis tota diminutio de corpore cubi, ſuperabit adjectionem altitudini factam. Atqui maiores ſunt quatuor laterculi laterales, duobus laterculis altitudinis, quod ſic probo. Eſt enim unusquilibet laterculorum lateralium ad laterculum altitudinis, ut decrementum lateris cubici, ad incrementum altitudinis, ſc. cuius dimidium eſt KD. Sed decrementum lateris cubici, ad incrementum altitudinis, habet proportionem compoſitam ex proportione AG ad GB, & GK ad KD. Nam ut decrementum ſemilateris, ad decrementum ſemidiagonij GK, ſic AG ad GB, quæ eſt pars proportionis una: altera eſt ipſa proportio GK ad KD. Atqui proportiones hæ duæ junctæ conſtituunt aliquid minus ſubdupla. Eſt enim AG ad GB ſub-ſemidupla, & GK ad KD minor quam ſub-ſemidupla. Semis autem & minus quàm ſemis compoſita, faciunt minus quam totum. Si ergo vnus laterculus lateralis ad vnum altitudinis, habet proportionem minorem ſubduplâ: vnus ergo altitudinis, non eſt

planè

planè duplum vnius lateralis, & vnus altitudinis, non planè æquat duos laterales, ſed minor eſt: & per conſequens duo altitudinis, ſunt minores quatuor lateralibus: Et igitur adjectio facta altitudini, minor eſt diminutione factà de lateribus cubi. Columna igitur Sphæræ, altior cubo, eſt minor corpore cubi.

Sit ſecundò columna Cubo humilior, & ducatur ipſi GA altitudini Cubi, parallela in circulo minor LN, pro altitudine columnæ, & ipſi GB diagonio plani cubici, ducatur ex L parallela LM, pro diagonio quadrati columnaris cubico maioris, ſecans GA in O.

Rurſum igitur, ut prius, eſt, ut MO ad OA, ſic GO decrementum altitudinis ex vna parte ad OL incrementum ſemidiagonij Sed BG eſt minor quam MO, & GA eſt maior quam OA. Ergo proportio BG ad GA, quæ eſt in Cubo ſemidupla, minor eſt quàm GO ad OL. Maior eſt igitur proportio GO ad OL, quàm ſemidupla.

Sed proportio inter incrementum ſemidiagonij OL, & incrementum ſemilateris quadrati, eſt ſemidupla. Ergo compoſitis ſemiduplà & plusquàm ſemiduplà in vnam, erit proportio GO decrementi dimidiæ altitudinis ad incrementum ſemilateris, maior duplà. Sed per ductum duorum quadratorum cubicorum in GO, creantur laterculi duo diminuti de altitudine corporis cubici. Contrà per ductum quatuor quadratorum cubicorum, in incrementũ ſemilateris, creantur laterculi quatuor, qui ſunt maiores ea adjectione & circumpoſitione, quæ facta eſt circa corpus Cubi. Nam etſi appoſitis his quatuor laterculis, adhuc hiat columna, deficientibus quatuor columellis, apud quatuor erecta columnæ latera; tamen viciſſim excedunt hi laterculi altitudinem columnæ, octo alijs columellis æquealtis cum illis deficientibus, craſſioribus tamen, quàm illæ. Harum enim craſſities eſt GO, illarum craſſities eſt ad OL, ut AG ad GB, minor ſc. quàm OL, multo igitur minor quam GO. Tribus igitur nominibus octo craſſæ columellæ excedentes, ſunt maiores quatuor exilibus deficientibus. Quatuor igitur laterculi dicti, ſunt maiores appoſitione, factà ad corpus cubi. Quod ſi igitur incrementum ſemilateris eſſet præciſè dimidium ipſius GO: quod creatur à GO, ductà in duo quadrata, æquale eſſet ei, quod creatur ab incremento ſemilateris, ducto in quadrata quatuor. At minus eſt incrementũ ſemilateris, dimidio ipſius GO, ut demonſtratũ. Quare & quatuor laterculi quadrati, minores ſunt duobus laterculis altitudinis. Multo igitur minor eſt adjectio, facta ad latera cubi, quàm diminutio, facta de altitudine. Columna igitur Sphæræ, humilior cubo Sphæræ, minor eſt corpore Cubi in eadem Sphæra. At prius etiam altior Cubo, minor erat illo: nulla igitur Columna ſphæræ, quadratarum baſium & rectangulorum laterum, aſſequitur corpus Cubi in eadem Sphærà: quod erat demonſtrandum.

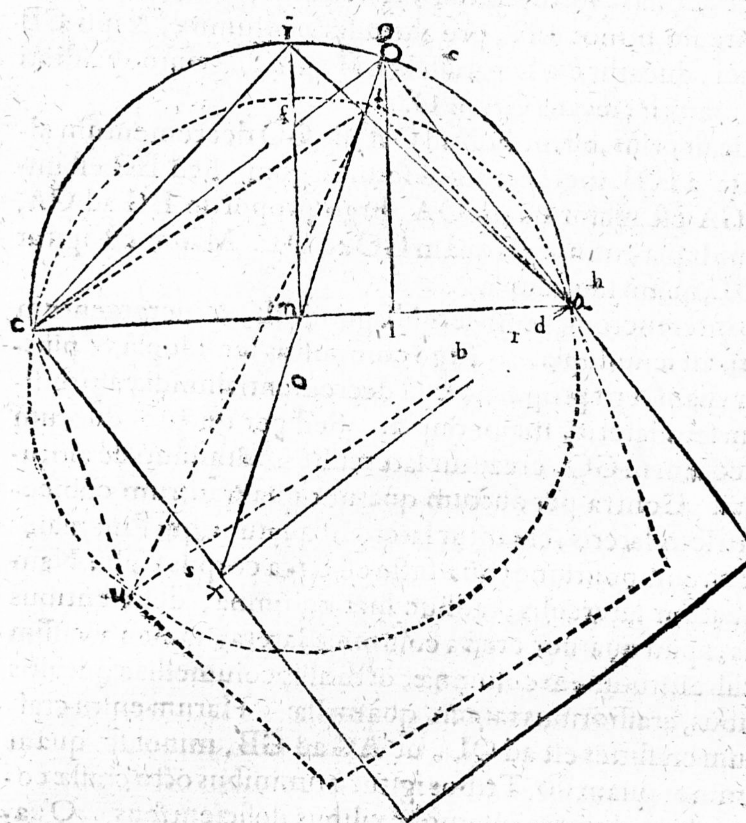
THEOREMA V.

Omnium Cylindrorum, diagonium eandem habentium, maximus & capaciſſimus eſt is, cujus diameter Baſis, eſt ad altitudinem in proportione ſemidupla, ſeu

vt latus Tetraedri aut diagonios quadrati cubici ad latus cubi in eadem ſphæra.

Repetatur Schema Theorematis primi, & ſit AC linea diagonios Rectanguli, quo conus ſecatur per axem, repræſentans virgam menſoriam, & ſuper AC conſtituatur ſemicirculus AGC, dividatur verò AC in partes tres æquales, & ſit AL pars vna, LO duæ, & ex L erigatur perpendicularis LG, ſecans circulum in G, & connectatur G cùm A & C. Quia igitur GL ipſius LA eſt dupla, erit CA ipſius LA tripla. Vt verò CA ad AG, ſic AG ad LA. Tribus autẽ exiſtentibus proportionalibus continuè, vt prima eſt ad tertiam, ſic quadratum primæ eſt ad ſecundæ quadratum, quia ergo CA prima, eſt triplum tertiæ LA, quadratum etiam ipſius CA diametri erit triplum quadrati AG, ſecundæ. Et quia quadratum AC æquat quadrata AG, GC, juncta, quorum AG eſt tertia pars, erit GC duæ tertiæ ipſius AC, & ſic quadratum GC duplum erit quadrati AG. Igitur AG eſt latus Cubi inſcripti ſphæræ AGC, & AC eſt diagonios quadrati Cubici, vel latus Tedraedri inſcripti eidem ſphæræ. Dico Cylindrum, cuius diameter baſeos, eſt GC, altitudo GA, eſſe omnium Cylindrorum, quibus eſt hæc diagonios AC, capaciſſimum, ſeu maximo corpore. Nam quia, GC, puncta ſunt in ſuperficie ſphæræ, & linea GC eſt diameter baſis unius: tota igitur circumferentia illius baſis ſtabit in circumferentia ſphæræ; ſic & baſis oppoſita, cuius unum punctum A. At ſi AG latus eſt Cubi, & GC diagonios lateris Cubici, neceſſario in circulo GC, & ſic in Sphæra, inſcriptum erit quadratum cubicum, cuius oppoſiti duo anguli G, C, ſic & in circulo baſis oppoſitæ per A traductæ. Itaq; Cylindrus jam definitus, habebit inſcriptum Cubum eiuſdem ſecum altitudinis, cuius omnes anguli ſtant in ſuperficie ſphæræ.

Schema XXI.



Eodem modo etiam in alio quocunq; ſphæræ circulo, cuius verbi gratia IC diameter, intelligitur inſcriptum quadratum columnæ, cuius alti-

altitudo IA, & quadrati unius, anguli duo I. C. oppoſiti, quadrati alterius anguli A,X: itaq; Cylindro AIC columna æquealta inſcripta eſt.

Atqui omnium Columnarum ad Cylindros æquealtos, quibus inſcribuntur, eadem eſt proportio; Cubus verò omnium in ſphæra Columnarum eſt maximus, Cylinder igitur AGC, cubo ſphæræ circumſcriptus, omnium aliorum Cylindrorum in ſphæra, ut AIC, maximus eſt.

Eadem demonſtratio poteſt etiam per Schema XIX. in hunc modum inſtitui Cylindri tres terminentur in H, G, A, punctis, eandem habentes diagonion CA, baſes CH, CG, CB, altitudines HA, GA, BA. Sit autem quadratum CG duplum quadrati GA, & CH brevior, CB longior ipſâ CG. Deſcendant perpendiculares in CA, quæ ſint HM, GL, BK. Cùm igitur ſit CGA rectus, erit ut quadratum CG ad quadratum GA, ſic recta CL ad rectam LA, dupla ſcilicet eius; & ut quadratum CH ad quadratum HA, ſic CM ad MA, & ut quadratum CB, ad quadratum BA, ſic CK ad KA. Vt verò quadrata CH, CG, CB inter ſe, ſic ſunt etiam baſes Cylindrorum circulares inter ſe. Quare ut CM, CL, CK inter ſe, ſic etiam ſunt baſes cylindrorum inter ſe. Componitur autem proportio Cylindrorum ex proportione baſium & proportione altitudinum. Ergo rectangula tria, ſub CM, CL, CK, quæ habent proportionem baſium, & ſub HA, GA, BA altitudinibus, habent inter ſe proportionem Cylindrorum. *Schema XIX.*

Permutatim autem ut AM, AL, AK inter ſe, ſic ſunt inter ſe etiam quadrata altitudinum AH, AG, AB. Eſt igitur quantitas eadem LM, quæ adjicitur ad LA, & aufertur ab LC; & viciſſim quantitas eſt eadem LK, quæ aufertur ab LA, & adjicitur ad LC. Cùm aum autem CL ſit dupla ipſius LB, proportio igitur CM brevioris, ad CL longiorem, eſt maior dimidia proportione everſa ipſius MA tanto longioris, ad LA breviorem. Vt ſi CL ſit 20, LA 10, deinde CM 19, MA 11, proportio 20 ad 19. maior eſt dimidia proportione ipſius 11 ad 10, hoc eſt 22 ad 20. Nam proportio 22 ad 20 habet duo elementa, 22 ad 21, & 21, ad 20, quorum utrumq; minus eſt proportione 20 ad 19. Eſt igitur proportio MA ad LA, & ſic quadrati HA ad quadratum GA, minor quàm dupla proportionis CL ad CM. Sed rectarum ipſarum HA ad GA proportio eſt dimidia quadratorum, & duplæ proportionis dimidia, eſt ſimpla. Ergo altitudinis HA ad altitudinem BA proportio minor eſt, quàm LC ad MC, proportio baſium. Rectangulum igitur ſub HA, CM, repræſentans cylindrum CHA, minus eſt rectangulo ſub GA, CL, repræſentante cylindrum CGA, quia CM eſt brevior in ſua proportione, HA longior in ſuâ.

Idem demonſtratur verſis argumentis etiam de cylindro CBA. Nam proportio CK longioris ad CL breviorem, eſt minor quàm dimidia proportionis everſæ AK brevioris ad AL longiorem. Vt ſi CL ſit 20, LA 10, de inde CK 21. KA 9. Proportio 20 ad 21 minor eſt quam dimidia ipſius 9 ad 10, vel 18 ad 20. Nam proportionis 18 ad 20 elementa duo, 18 ad 19, & 19 ad 20, ſunt ſingula maiora proportione 20 ad 21. Proportio igitur LA ad AK, hoc eſt quadrati GA ad quadratum AB, maior eſt quam dupla KC ad CL: & ſic linearum GA ad AB proportio maior eſt, quàm KC ad CL; nec quanto BA brevior eſt ipſa GA in proportione ſua, tanto viciſſim longior ECK quàm CL in

CL in ſua; & rectangulum ſub BA, CK minus eſt rectangulo ſub GA, CL, cylinder igitur CBA minor cylindro CGA: ſolus igitur CGA omnium maximus.

Corollarium I.

Dolia Cylindracea ſine Ventre, ſive longioris fuerint figuræ quàm Auſtriaca ſive curtioris, minus ſunt capacia Auſtriacis.

Corollarium II.

Patet hinc bono quodam & Geometrico genio eſſe factum, quod Auſtriaci Vietores Regulam hanc obſervent conſtruendi dolij; ut tertia parte de longitudine Tabulæ utantur pro ſemidiametro Orbis lignei. Nam hac ratione fit, ut Cylinder inter duos orbes ligneos mente adumbratus, quam proximè habeat duas medietates, ad Regulam Theorematis V. quadrantes, & figuræ capaciſſimæ participes, etſi à perfectione Regulæ nonnihil recedant. Nam figuræ aliæ, terminatæ ad puncta ipſi G proxima cis & ultra, minimum variant capacitatem; quia capacitas figuræ AGC maxima eſt: circa maximam verò utrinq; circumſtantes decrementa habent initio inſenſilia.

In Schemate ſequenti CG ad GA habeat rationem ſemiduplam, eam nempe quam 100000. ad 70711: duplicata AG ex hac regula debebat habere 141421; at vietores pro hoc ſumunt longitudinem 150000. ſeſquialteram baſis, pro longitudine tabulæ GX, quod paulò plus eſt, quam 141421. Et hoc ipſum facit ad figuræ capaciſſimæ imitationem accuratiorem. Nam tabulæ & curvantur & marginibus utrinq; extant & procurrunt ſuper crenas, quibus capiunt & ſtringunt orbes ligneos. Quod igitur nimium eſt in hac tabularum longitudine, quæ eſt ad diametrum baſis in proportione ſeſquialterà, id his marginibus imputatur, qui in examinatione figuræ ad regulam Theorematis V, non cenſebantur.

Quis neget Naturam inſtinctu ſolo, ſine etiam ratiocinatione docere Geometriam? cùm Vietores noſtri, ſolis oculis & ſpeciei pulchritudine ducti, capaciſſimam in dimidiato dolio figuram exprimere didicerint? Prodeat Geometra, doceatq; faciliorem Methodum conſtruendi dolij, quod dimidià ſui parte ad capaciſſimum Cylindrum propius accedat, quàm eſt hæc ipſa, quam Vietores Auſtriaci ex antiquo tenent, proportionis ſeſquialteræ: doceat idem Geometra figuram ad compendioſè menſurandum aptiorem, quàm eſt illa quam ſtruit Auſtria.

Credere poteram, extitiſſe olim præſtantiſſimum aliquem in Auſtria Geometram, qui Vietores iſta docuerit; niſi me hoc retinuiſſet, quod pulcherrimæ demonſtrationis veſtigia nuſpiam extant in libris Geometrarum: quodq; ratio hæc conſtruendi dolij, quod equidem ſciam, ad Rhenum, cæteraq; loca vitifera, uſitata non eſt; ferè enim longiora dolia factitant. Quod igitur publicè receptum non eſt, quî poſſit eſſe veriſimile, ex libris aut inſtitutione Geometrarum, ab vnà ſola natione petitum eſſe?

Admo-

Admonitio.

Quis tam eſt ingenio perſpicaci & circumſpecto, qui eluctatus ex hallucinatione iſta, qua Cylindrorum eandem diagonion habentium illis maximum corpus tribuerat, quibus eſt area maxima ſectionis per axem; poſtquam didicit, ijs Cylindris eſſe maximum corpus, in quibus diameter baſis eſt ſemidupla altitudinis, per Th. hoc V, ijs verò, qui lineas has habeant æquales, aream ſectionis eſſe maximam, per Th. I. huius partis: & verò eandem eſſe circa areas & Truncorum Conicorum rationem, per Th. II. huius: qui inquam his perſpectis, non ſtatim etiam de corpore Trunci conici præſumat idem, quod de corpore Cylindri: quòd ſcilicet etiam Trunci conici illius corpus ſit maximum, in quo diameter baſis minoris, ſit dupla lateris acclivis? Atq; id ego & credidi per hunc ſeſquiannum, & ſecutus ſum: iamq; in hoc eram, ut hoc nixus fundamento, dolia Rhenenſia promiſcuè omnia, ſine diſcrimine ventrium, Auſtriacis poſtponerem in capacitatis cenſura: quod nullâ quidem illorum cum iniuria feciſſem ſed tamen iure non æquali. Itaq; commoditati Typographiæ præſentis acceptum fero, quod aurem hic vulſit Geometria, editionem curanti, ſequentiaq; Theoremata, velut augendo ſupplemento ad Archimedem, mihi ſuppeditavit; quibus ſimul altera, multoq; priore mirabilior proprietas dolii Auſtriaci traditur.

Definitio.

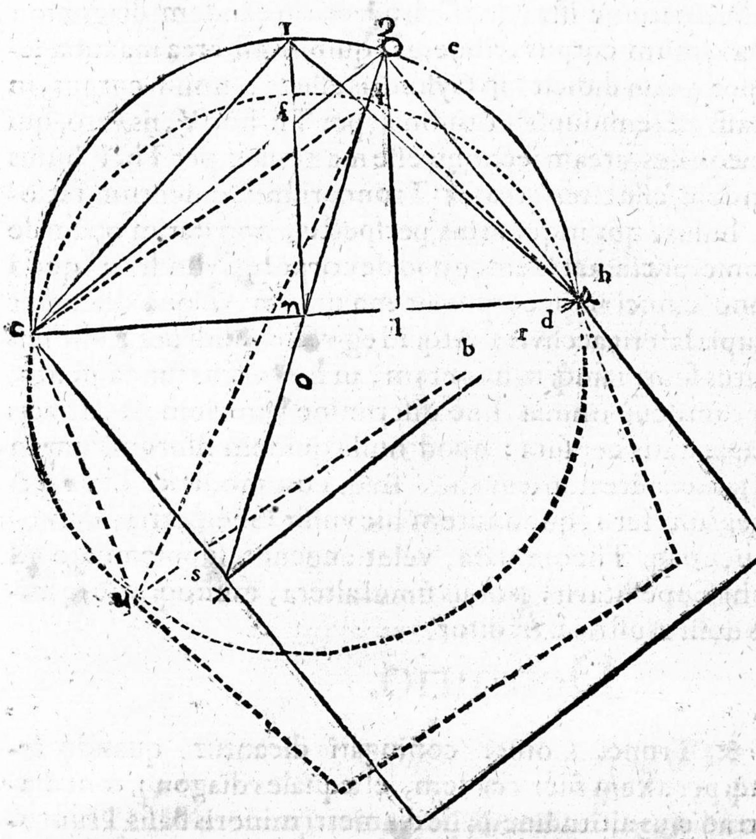
Cylinder & Trunci Conici coniugati dicantur, quando ſectionibus utrorumq; per axem fuerit eadem, vel æquales diagonij, & ut diameter baſis cylindri ad eius altitudinem; ſic diametri minoris baſis Truncorum, ad eorum latera acclivia.

Theorema VI. Problema.

Dato Cylindro & Trunci conjugati latere, vel baſis minoris diametro, inuenire trunci conjugati lineas reliquas. Oportet autem proportionem lateris uel baſis in Cylindro ad datum latus vel baſin Trunci, eſſe minorem proportione diametri et altitudinis Cylindri junctarum, ad diagonium.

Datus eſto Cylinder AGCX, baſis diametro CG, altitudine GA, diagonio AC: & Trunci data eſto diameter baſis CT; & proportio CG ad CT ſit minor proportione CG, GA junctarum ad CA. Oportet invenire latus trunci & diametrum baſis maioris. Fiat ut CG ad GA, ſic CT, ad aliquam, puta AT: & ſuper CA, ſtruatur triangulum ex CT, AT. Nam quia proportio CG, GA ad CA eſt maior, quàm proportio CG ad CT, erit etiam maior quàm GA ad AT, & junctis terminis, maior erit proportio CG, GA ad CA, quàm earundem CG, GA ad CT, TA. Ac proinde CT, TA junctæ maiores erunt, quàm CA, poterit igr fieri triangulũ ex CT, TA ſuper CA. Scribatur autem circulus circa C, T, A, puncta; & ex C, ipſi

TA æqualis extenſa, applicetur circulo in V, & connectantur AV, dico TA, CV eſſe Trunci coniugati latera acclivia, AV diametrũ baſis maioris.



Connexis enim TV punctis: cùm TA ſit ipſi CV æqualis, communi arcu TC appoſito ad arc⁹ TA & CV, erunt arcus AC, TV, æquales, proinde & ſubtenſæ AC, TV æquales, & angulus ATC, angulo VCT, æqualis; quadrilaterũ igitur ATCV, erit ordinatum & circulo inſcriptũ, eadem diagonio AC vel TV, cum parallelogrammo AGCX, & eadem proportione CT ad TA, qua eſt LG ad GA; Truncus igitur, cuius ſectio per axem ATCV, & cylinder, cuius ſectio AGCX, conjugati erunt.

THEOREMA VII.

Si fuerint Cylinder & Truncus Conicus coniugati, & differentia diametrorum in baſibus trunci ſecetur in proportione, quam habent inter ſe quadrata, diametri Baſis, & altitudinis Cylindri; erit hoc diametri quadratum, æquale rectangulo, ſub minore diametro Trunci, & ſub compoſita ex hac & ſegmento, quod diametro Cylindri reſpondet.

Sit AGCX cylindri ſectio, diagonios AC: dividat autem hanc perperpendicularis à G in partes CL, LA, ſic ut CL reſpondeat ipſi CG. Formetur etiam ſectio Trunci ATCV, ſuper eadem AC diagonio, per VI præmiſſam, cuius diametri, minor CT, maior AV, & ablatã ab AV, ipſi CT æquali VB, reſiduum eſto BA.

Cùm igitur ATCV quadrilaterum ſtet in circulo, quadratum ab AC, erit æquale rectangulis duobus, & ſub TC, AC, & ſub TA, CV, id eſt qua-

quadrato de TA vel CV, junctis, Ablato igitur quadrato ipſius AT, à quadrato ipſius AC, reſtabit rectangulum ſub TC, AV, hoc eſt ſub BV, VA. Atqui etiam quadrato ipſius AG, maioris, quàm eſt AT, ablato ab eodem quadrato AC, relinquitur rectangulum GC, AX, hoc eſt quadratum GC, quod ideò minus eſt rectangulo BVA.

Erit igitur rectangulum aliquod minus quam BVA, æquale quadrato GC; ſit BVD, reſiduum igitur ſub DA, BV, erit exceſſus rectanguli BVA, ſuper quadratum GC. Sed exceſſus hic, eſt æqualis exceſſui quadrati GA, ſuper quadratum AT. Et quia rectangulum BVD, poſitum fuit æquale quadrato GC, & rectangulum DBV, eſt exceſſus rectanguli BVD, ſuper quadratum BV vel TC; eſt igitur DBV etiam exceſſus quadrati GC ſuper quadratum TC. Componendo igitur, cum ſit quadratum AG ad quadratum GC, ut quadratum AT ad quadratum TC; erit etiam, ut quadratum AG ad quadratum CG, hoc eſt, ut AL ad LC, ſic exceſſus quadrati AG ſuper quadratum AT, hoc eſt, rectangulum ſub DA, BV, ad exceſſum quadrati GC ſuper quadratum TC, hoc eſt ad rectangulum DBV. Vt igitur AL ad LC, ſic rectangulum ſub AD, BV, ad rectangulum DBV; quare cùm rectangula habeant eandem longitudinem BV, erunt etiam ut AL ad LC, ſic latitudines AD ad DB. Quare reflectendo ſi fuerit diviſa AB in D ſic, ut ſit BD ad DA, ſicut eſt CL ad LA, hoc eſt, ut quadratum CG ad quadratum GA; rectangulum DBV, æquabit quadratum GC, quod erat demonſtandum.

Corollarium I. & Praxis.

Si dantur quadrata altitudinis & baſis Cylindri, cum diametro baſis minoris in Trunco, divide quadratum baſis per diametrum baſis trunci datam, à quotiente aufer diviſorem, quod reſtat, multiplica in ſummam quadratorum, factum divide qer quadratum altitudinis cylindri, provenit differentia diametrorum, adijcienda ad minorem datam, ut componatur diameter Trunci maior.

Exemplum.

Sit quadratum AG. 2000. quadratum GC etiam 2000 | 167 - Quotiens
Et ſit TC 120 | 120 Diviſor
AD 47 - Differentia.
Summa quadratum 40000
Factus 1866667 | 93 + Quotiens AB
quadratum AC 20000 | 120 TC
213 + compoſita, AV

Corollarium II.

Si verò econtrà datur ſolùm proportio quadrati altitudinis ad quadratum baſis diametri, & diameter utraq; baſium Trunci; Diameter Baſis Cylindri ſic invenitur. Adde numeros, quibus expreſſa eſt quadratorum proportio, & multiplicatâ differentiâ diametrorum trunci, in numerum quadrati maioris, factum divide per ſummam utriuſq; Numeri, quotientem multiplica in minorem Trunci diametrum, proveniet quadratum diametri in baſe Cylindri.

Sit CG ad GA ut 3. ad 2. Factus 234.
quadrata ut 9. ad 4. Summa 13. | 18 Quotiens
Sit CT. 130, TA 156 differentia 26. 130 CT.

Factus 234 Factus 2340. qdm CG.

Vel quod idem eſt, numerum quadrati maioris multiplica in diametrum minorem, & fac, ut ſummam quadratorum ad differentiam diametrorum trunci, ſic factum ad quartum, qui erit quadratum CG.

Corollarium III.

Si quadratum AG, ad quadratum AC, eſt ut 3. ad 2. DV eſt duarum medietatum arithmeticarum inter TG, AV maior; Hinc Praxis brevior.

Dia- 19. 20. 21. 22. metri.
19.

399. quadratum GC.

Corollarium IV.

Sicut ſe habet baſis minor Trunci, ad baſin Cylindri, aut quadratum lateris acclivis Trunci, ad quadratum altitudinis Cylindri, ſic ſe habet diameter minoris baſis, ad compoſitam DV.

THEOREMA VIII

In Cylindro & Trunco conico coniugatis, altitudinum proportio componitur ex proportione Diametrorum in Baſibus, minori Conici trunci, & utraq; Cylindri, & ex proportione perpendiculi, ad latus acclive Trunci.

In Schemate XXI. Sint figuræ conjugatæ CGAX & GTAV, in quibus diametri baſeon, Cylindri CG, XA, Trunci minor VCT, maior VA, ſitq; perpendiculum Trunci TR, latus acclive TA. Dico proportionem altitudinum Cylindri GA, ad Trunci TR, componi ex proportione GC ad GT, & ex proportione AT ad TR. Theorematis ipſius facilis eſt demonſtratio, nec minus tamen ſeparatim fuit tradenda, ob Corollaria & Analogiam notabilem. Cùm enim ſit CG ad GA, ſicut CT ad TA, permutatim igitur, erit GC ad CT, ut GA ad AT: Sed proportio GA ad TR, compoſita eſt ex proportione GA ad AT, & ex proportione AT, ad TR: ergo etiam ex GC, ad CT, & ex AT ad TR.

Corollarium & Praxis quærendæ altitudinis.

Datis CT, & VA, per præmiſſam, datur etiam quadratum ipſius CG; data verò proportione huius quadrati CG, ad quadratum GA, datur etiam qua-

quadratum GA, & quadratum TA. Sed & differentia ipſarum CT, VA, nota eſt, ſc. BA: & quadratum TA, minus eſt quadrato TR, parte quarta quadrati BA, in omni conjugatione. Anguli enim ad C & T, æquales ſunt, & CT, VB æquales, ex Hypotheſi, atq; etiam parallelæ: connexis igitur B, T, erit BT æqualis ipſi CV: ſed hæc eſt æqualis ipſi TA, ex hypotheſi: Ergo BTA iſoſceles eſt cuius TR perpendiculum: itaq; BR eſt æqualis ipſi RA, eòq; quadratum BA, quadruplum ipſius RA. Ablata igitur parte quarta quadrati BA à quadrato TA, reſtat quadratum TR, altitudinis Trunci, quod comparatum cum quadrato GA, conſtituit quæſitam proportionem.

Exempla.

Sit TC 19 AV. 22. Quod ſi quadratum GC fuerit ad GA duplum: erit quadratum GC ut prius, 399. Erit igitur quadratum GA 399 ſemiſſes, vel 798 quadrantes: proinde cùm quadratum de 19 ſit 361, erit etiam TA 361 ſemiſſes vel 722 quadrantes. Denique cum differentia CT & VA, ſc. 19 & 22, ſit 3, quadratum 9, pars quarta, 9 quadrantes: aufer hos à 722, reſtant 713 quadrantes pro quadrato TR. Ita conſtituitur proportio quadrati GA ad quadratum TR, quæ 798 ad 713.

Sit verò alia conjugatio, quadrata ſc. AG, GC æqualia, & ſic etiam quadrata AT, TC: & maneat CT, 19. VA 22. Erit quadratum TA 1444 quadrantes, eoque quadratum TR 1435 quadrantes: Et proportio quadrati GA ad quadratum TR quæ 1596 ad 1435, vel in minimis, quæ 228 ad 205.

Aliud Exemplum. Sit TC 19. AV 20. ſeu quod idem eſt 57, & 60. ut communicent cum ternario, propter uſus ſecuturos. Deinde ſit quadratum GC ad quadratum GA, non duplum, ut 2. ad 1. vel ut 8. ad 4. ſed minor, ut 7. ad 4. Cùm ergò per præmiſſam, differentia, quę hîc eſt 3, ſit dividenda in proportione 7 & 4, tota igitur eſt ut 11. eòque alij termini ſunt aſſumendi, communicantes cum 11, ſcilicet 627. & 660. ut ſit differentia 33. de qua pars reſpondens quadrato GC, eſt 21. Compoſita igitur VD eſt 648. quam duc in minorem diametrum 627, provenit 406 296, quadratum GC, quod eſt ad quadratum GA, ex hypotheſi, ut 7. ad 4. Ergo quadratum GA 232 169 cum ſeptimâ, ſeu 928 677- quadrantes. Eſt autem quadratum minoris TC 393 129, Et ut 7 ad 4, ſic quadratum TC ad quadratum TA, quod erit ideò 224 645 & 1 ſeptima, ſeu 898581- quadrantes. Differentia diemetrorum eſt 33, cuius quadratum 1089, & eius quarta pars, totidem quadrantes. Aufer hoc à quadrato TA, reliquuntur 897492-. Hîc ergò eſt proportio q. GA ad q. TR, quę 928 676 ad 897 491, vel 3 714 708 ad 3 589 968; in minimis, ut 464 377 ad 448 746.

Sit autem proportio quadratorum, non ut 7. ad 4, ſed ut 9 ad 4. ipſarum ſc. linearum GC ad CT, quę 3 ad 2. & ſit VC 19. AV 20. Oportet ergò differentiam 1, dividere in proportione 9. ad 4. Tota ergo ſecanda eſt in particulas 13, & propter communionem cum ternario, in 39. Fient autem termini, VA 780, TC 741, quadratum 549 081. Vt autem 9 ad 4, ſic quadratum hoc ad quadratum TA 244 036, de quo aufer quartam de quadrato 39, ſc. 1521 quadrantes, reſtant 974 623 quadrantes, pro TR. Iam pars diametri, reſpondens quadrato GC, eſt 27: compoſita igitur, eſt 768, qua ducta in diametrum 741, provenit quadratum GC 569 088, ut verò 9 ad 4, ſic hoc ad 252 928 ſeu 1011 712 quartas. Ergo proportio quadrati GA, ad quadratum TR, eſt illa, quę 1011 712 ad 974 623.

Corollarium II. & Analogia.

In conjugatione æqualitatis pulchra exiſtit ſeries proportionum inter quadrata altitudinum: talis nempe,

Si fuerit TC ad AV		Erit qdm GA ad q. TR		In conjugatione dupla talis. TC. AV		qdm GA	qdm TR		Increm: 1ma	2da
ut 1. ad	2	ut 1. ad	2	1.	2	ut 3.	diff 7.	10	22	
2.	3	3.	4	2.	3	21.	11.	32.	34	12
3.	4	5.	6	3.	4	51.	15	66.	46	12
4.	5	7.	8	4.	5	93.	19.	112.	58	12
5.	6	9.	10	5.	6	147.	23.	170.	70	12
6.	7	11.	12	6.	7	213.	27.	240.	82	12
7.	8	13.	13	7.	8	291:	31.	322.	94	12
8.	9	15.	16	8.	9	381.	35.	416.	106	12
9.	10	17.	18.	9.	10	483	39.	522.		

Quia puncta D, R hîc coëunt. Tale quid occurrit in unaqualibet Conjugatione

THEOREMA IX.

Si differentia diametrorum Trunci ſecetur in proportione laterum Cylindri conjugati, & addatur pars reſpondens diametro Baſis Cylindri ad minorem, fiantq; rectangula, I. ſub minore & maiore, II. ſub minore & modo compoſita: Proportio rectanguli primi, aucti tertia parte quadrati à differentia diametrorum, ad rectangulum ſecundum, & proportio altitudinis Cylindri ad altitudinem Trunci, in vnum compoſitæ, conſtituunt proportionem corporis Trunci ad corpus Cylindri conjugati.

In Schemate XXI. manentibus cæteris, ut præcedenti Theoremate, ſit BA differentia diviſa in D ſic, ut ſicut quadratum AG ad quadratum GC, ſic ſit AD, ad DB. Dico proportionem rectanguli ſub CT, AV, vnà cum tertia parte quadrati à BA, ad rectangulum CT, VD, & proportionem GA ad TR, in unum compoſitas, conſtituere proportionem corporis Trunci ad Cylindri coniugati corpus. Nam per XVII. primæ partis, eſt ut rectangulum CT, VA, junctâ tertiâ parte quadrati de BA, ad quadratum, CT, ſic corpus Trunci CTAV, ad corpus Cylindri æqualis & (inſcripti), ſuper baſi eàdem CT. Vt verò quadratum CT ad quadratum CG, ita corpus Cylindri ſuper CT baſi, ad corpus Cylindri æquealti, ſuper baſi CG, per dicta ad III & XVI. p. primæ. Vt ergo rectangulũ CT, VA, junctâ tertiâ parte quadrati de BA, ad quadratum CG, hoc eſt, per VI. præmiſſam, ad rectangulum CT, VD, æquale quadrato GC: ita corpus Trunci, baſibus CT, AC, ad corpus Cylindri æquealti. Si ergo Truncus haberet altitudinem Cylindri coniugati, ſc. GA; valeret hæc jam dicta proportio ſola. Iam verò ut GA, altitudo Cylindri conjugati, ad TR, altitudinem minorem, ſic Cylinder coniugatus. ad Cylindrum altitudine Trunci, baſibus iiſdem, per Th. XVII. p. primæ; & ſic etiam Truncus altitudine GA, ad truncum coniugatum; altitudine TR. Hæc igitur eſt proportionis pars altera.

Corollarium I. & Praxis.

Data proportione Trunci ad Cylindrum æquealtum, baſi GG, per præmiſſas: datâ etiam proportione quadrati GA, altitudinis Cylindri, ad quadratum TR, altitudinis trunci coniugati, quia quadratorum proportionalium radices etiam proportionales ſunt, ſed proportionis dimidiæ: quadrabimus igitur numerum, quo effertur corpus Trunci, & faciemus, ut quadratum GA, ad quadratum TR, ſic quadratum numeri Trunci, altitudine GA, ad quadratum numeri juſti trunci, hoc eſt conjugati, altitudine TR: Radix ex hoc quadrato numero, prodit numerum corporis trunci, in proportione, ut quadratum GC, valet Cylindri conjugati corpus.

Sit CA quadratum ad quadratum GA ut 7. ad 4. & ſint CT. 19. AV. 20, vel ut in exemplo Th. VII, 627. 660. Differentia 33. Minore ergò medietate Arithmeticâ 638 in 627 ductâ, addito quadrato de 627, vel totâ 660 in eandem 627 ductâ, addito rectangulo ex 11 in 33, conflabitur 414183, pro corpore Trunci. Supra verò quadrati altitudinis cylindri conjugati, ad qdm altitudinis Trunci proportio erat quę 464377 ad 448746. Si feceris ergò, ut illum ad hunc, ſic quadratum numeri trunci hic inventi ad quartum, proveniet 165773240994, cuius radix 407153 pro Trunco: cùm quadratum cylindri, repręſentans eius corpus, eſſet 406296. En Truncum maiorem cylindro, plus quàm parte quingenteſima, cum in eadem proportione diametrorum, ſed conjugatione proportionis duplæ, in hoc Theoremate propoſita, Truncus eſſet minor cylindro, minus quam parte termilleſima.

Age verò etiam conjugationem tentemus proportionis dupla maioris. Sit TC 19. AV. 20. & q. GC ad quadratum GA, ut 9 ad 4, Erant ſupra, Th. VIII, termini TC 641. AV 780. Et quadratum GC 869088. Et quadratum GA ad quadratum TR, ut 1011712 ad 974623.

Ducto autem 741 in 780, & differentiâ 39 in partem tertiam 13, factisque additis, conflatur numerus Trunci 578487. Denique huius quadrato multiplicato in 974623, & facto diviſo per 1011712, prodit 3223 9900 7006. Et hinc radix 567802 eſt argumentum Trunci coniugati, cùm 569088 ſit argumentum cylindri. Truncus igitur hic, minor eſt plus quam parte ſexcenteſima. Minor autem erat in coniugatione proportionis duplæ, minus quam parte termilleſimâ.

Corollarium II.

In coniugatione duplæ proportionis, duarum medietatum arithmeticarum utraq; ſervit calculo, minor pro Tunicæ corpore, maior pro quadrato GC, & corpore cylindri coniugati.

Exempla

Differentia. Dia- metri,

3 | 19. 20. 21. 22.
3 | 19. Diff. 3. 19.

9 | 361. 60. 399.
4. | 4. 361. 4.

1444. 421. †1596.
9. 421. in minimis per 7.
* 1435. 177241. †228. *205

Multiplicato 177241 per 205, facto diviſo per 228, provenit 158362 cuius, radix 398 + denique arguit corpus Trunci in ea proportione, ut Cylinder conjugatus Valet 399.

In hac ergo conjugatione &

Proportione Diametrorum		reperitur Cylinder,	Truncus
1.	2.	15.	11 +
2.	3.	48.	46 +
3.	4.	99.	97 ſ.
4.	5.	168.	167 --
5.	6.	255.	254 --
6.	7.	360.	359 --
7.	8.	483.	482 --
8.	9.	624.	623 +
9.	10.	783.	782 +
&c.			
19.	20.	3363.	3362 +

Corol-

Corollarium III.

In figuratione proportionis æqualitatis, ſeu cum altitudo æquat diametrum baſis, utiles ſunt, primò duarum medietatum arithmeticarum minor pro Tunica, deinde vnica medietas arithmetica pro diametro GC.

Exemplum

Diff.	Dia-	Medi-	Unum	-a duo	-metri.
3	19.	20.		21.	22
Vel 6	38:	40.	41.	42.	44.
6	38.	6.	38.		
36	1444.	240.	1558.		
4		9.1444.	-		
			-		
9	1435.	1684.	-		

In minimis 35. - - - - 38. per cōm. diviſorem 41.

Tunica eſt 240. inſcriptus Cylinder 1444. Truncus ergo 1684, cuius numeri quadratum 2 835-856 multiplicatum in 33, & factus diviſus per 38. prodit 2611972, & hinc radix 1616+ pro corpore. Trunci, qualium corpus Cylindri conjugati eſt 1558.

Hoc pacto in proportione		Reperitur Cylin:	Truncus
1.	2.	54.	60
2.	3.	180.	197+
3.	4.	378.	405+
4.	5.	648.	685---
5.	6.	990.	1036---
6.	7	1404.	1456+
7.	8.	1890.	1846---
8.	9.	2448.	2521
9.	10.	3078.	3160+
&c.			
Deniq; 19.	20	13328.	13468+

pars minor centeſimâ ſecundâ in exceſſu eſt.

Conſideratio Analogiæ.

Hactenus fuerunt Theoremata aliquot, quibus utitur Calculus inquirendæ proportionis inter Conicum Truncum & ſuum Cylindrum conjugatum. Ex hoc verò calculo multa deſumuntur conſideratione digniſſima. Nam primùm per Corollaria II. & III. praxesq; varias inter ſe comparatas, apparet, non ſemper eandem eſſe proportionem Trunci ad Cylindrum, in vna aliqua conjugatione, ſed variari cum variata proportione Diametrorum Trunci. Et in Corollario quidem II. inventus eſt decreſcere Truncus manente Cylindro: in Corollario verò III crevit truncus, rurſum manente Cylindro. Nam in infima linea exceſſit Cylindrum parte minus centeſima, ſuperius parte minus triceſima octava, inde triceſima tertia, & ſic ſemper maiori, uſq; ad ſummam lineam, ubi erat pars omninò decima in exceſſu. Neceſſe autem eſt, ſi continuetur calculus ulteriùs, Truncum tandem fieri iterum minorem cylindro, in eadem conjugatione. Quæritur ergo quis Truncus in qualibet conjugatione ſit maximus, quis item cylindro conjugato æqualis. Secundò apparuit ex tribus Corollarijs & calculo adjuncto, Viciſſitudinem hîc aliquam eſſe inter conjugationes proportionis dupla maioris, & inter conjugationes, minoris. Nam in qua conjugatione regnat proportio dupla, in ea primùm omnium, Truncus omnis videtur minor exiſtere cylindro, licet inſenſibiliter, ſic, ut cylinder ipſe, veluti Truncorum omnium primus, & proportio diametrorum ejus, quæ eſt proportio æqualitatis, ſit Truncorum omnium maximus & ſibi ipſe æqualis; in qua verò conjugatione regnat proportio maior dupla,

duplà, trunci omnes, etiam proximi ipſi cylindro, ſenſibiliter minores fiunt cylindro conjugato: an ergò viciſſim, in qua proportio regnat minor duplà, Trunci primùm cylindro evadant maiores, uſq; ad certam metam; inde rurſum decreſcant, fiantq; tandem cylindro ſuo æquales, deinde minores; donec tandem Trunci penitus evaneſcant, manente cylindro conjugationis? Tertiò, cum omnium coniugationum cæterarum cylindri ſint minores cylindro coniugationis duplà proportione uſæ: creſcant verò trunci aliquarum coniugationum ſupra ſuos cylindros coniugatos: quæritur num hic exceſſus tantus ſit, ut æquet vel ſuperet cylindrum per coniugationes omnes maximum, & ſi hoc, quæ ſint ergo diametrorum proportiones, in quibus truncus fiat cylindro maximo æqualis? Hæc igitur ſequentibus aliquot Theorematis nobis ſunt expedienda, quantum quidem eius per meam ſcientiam fieri poterit: ſunt enim ad æſtimationem & comparationem doliorum cumprimis neceſſaria.

THEOREMA X.

In omni conjugatione, Trunci per augmentum proportionis diametrorum tandem fiunt minores quacunq; data quantitate ſolida.

Sit coniugatio quæcunq;, cuius proportio CG ad GA: dico dari truncum, ut CTA, eiuſdem coniugationis, ſcilicet in quo ſit CT, ad TA, ut CG ad GA, minorem quacunq; propoſita quantitate ſolida. Hoc verò demonſtratu eſt facile. Nam minui poſſunt latera figuræ CT, TA, ſemper manente inter ea proportione, quæ eſt inter CG ad GA, eòuſq; dum CT, TA æquent junctæ diagonion CA, quando tria latera VC, CT, TA juncta, æquant quartum VA, quæ eſt proportio diametrorum CT, ad VA, quanta poteſt eſſe in hac coniugatione, maxima: quo caſu truncus omnis in baſin ſeu in planitiem circuli VA ſubſidit. Superficies verò quantacunq;, minor eſt omni quantitate ſolida.

THEOREMA XI.

Cylinder æqualis Trunco æquealto, baſin habet compoſitam ex duarum baſium Trunci & earum medij proportionalis Trientibus ſingulis.

Nam rectangulum ſub diametris Trunci, eſt æquale quadrato mediæ proportionalis inter diametros, per 17. VI. Eucl. & duo talia rectangula, vnâ cum quadrato differentiæ, conſtituunt duo quadrata duarum diametrorum, ſub quibus rectangula continentur per 7. II. Eucl. Tria ergo

3. 5.	15. bis 30.
3. 5.	Diff. 2.2. 4
9.25. --34.	34

rectangula, vna cum quadrato differentiæ, ſunt æqualia tribus quadratis, & duarum diametrorum in baſibus, & mediæ proportionalis. Rectangulum igitur unum, cum triente quadrati differentiæ, æquat tertiam partem ſummæ quadratorum proportionalium, & ſic iunctos ſingulos ſingulorum Trientes. Vt vero rectangulũ, cum triente dicto, ad quadrata baſium trunci, ſic corpus trunci ad corpora Cylindrorum æquealtorũ, ſuper trunci baſibus, per XVII. p. imæ. Quare etiam ut tres dicti trientes, ad quadrata baſium, ſic

corpus trunci (& ſic etiam cylindri trunco æqualis) ad corpora Cylindrorum ſuper trunci baſibus æquealtorum. Cùm autem talium baſes ipſæ, ſint ut corpora; etiam ſic erit baſis cylindri, trunco æqualis, ad baſes duas trunci: itaq; conſtabit ex earum & mediæ proportionalis trientibus ſingulis.

Clavius lib V Geometriæ Practicæ, cap III. utitur hoc theoremate non nihil transformato, quod & ſupra tetigi: ſed principia demonſtrationis adhibet difficiliora, nec evidenter cum meis connexa; lucis ergo cauſa meis principijs uti malui.

Exemplum. Sint diametri 19. 22, duc utramque in ſeipſam, & in ſe mutuò: erunt quadrata 361. & 484 & medium proportionale 418. Summa omnium 1263, cuius pars tertia 421 pro corpore Trunci, ut 361 eſt corpus Cylindri minoris.

THEOREMA XII.

Cylindri habentis altitudinem eandem cum Trunco recto, & diagonion eandem, diameter baſis eſt mediũ arithmeticum inter diametros baſium Trunci.

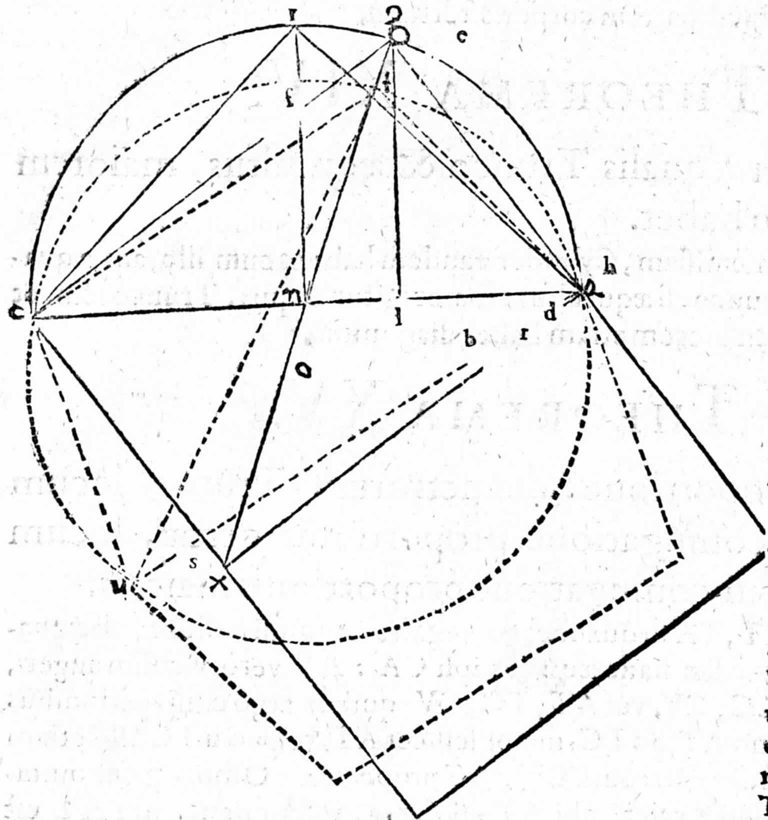
Sit cylinder CEAS, diagonium habens CA, & ſuper ea truncus rectus CTAV, cuius altitudo TR, æqualis altitudini cylindri EA vel CS. Dico baſis cylindri diametrum CE, medium eſſe arithmeticum inter CT, AV, diametros baſium trunci. Cùm enim truncus ponatur rectus, & latera acclivia CV, TA, æqualia, æquales vero etiam EA, & CS, & anguli S, E, recti, quippe in ſectione cylindri per axem: quare etiam VS & TE, latera triangulorum VSC, TEA, erunt æqualia. Eſt autem æqualis CE ipſi SA: quantum igitur CE excedit CT, ſc. quantitate TE; tantum etiam ipſa AV excedit AS vel CE, quantitate ſc. æquali VS. Eſt igitur CE medium arithmeticum inter CT, VA. q. e. d.

THEOREMA XIII.

Exceſſus trunci, habentis eandem cum Cylindro altitudinem, eandemq; diagonion, proportionem ad illum habet, quam pars duodecima quadrati differentiæ ad quadratum de diametro Cylindri.

Concipiatur cylinder, baſi CT, altitudine eadem TR, quam habet truncus CTAV: erit huius cylindri proportio ad cylindrum, baſi CE, altitudine eadem, quæ quadrati CT ad quadratum CE: & ut hæc quadrata ad communem differentiam, ſic cylindri CT, CE ad limbum, quem maior cylinder CE, minori CT circumponit. Sed differentia quadratorum conſtat rectangulis duobus ſub CT, TE, & quadrato TE, quæ eſt dimidia differentia CT, AV, dimidia ſcilicet AB, hoc eſt AR. Viciſſim cylindro baſi CT, circumjecta eſt tunica trunci CTAV, cuius Tunicæ proportio ad inſcriptum Cylindrum CT eſt eadem, quæ rectanguli ſub AB, BV (vel CT) cum Triente quadrati de AB, ad quadratum CT. Rectangulum verò ſub AB, CT eſt æquale duobus rectangulis ſub ET, TC; quia AB eſt dupla ipſius ET. Ablatis igitur his utrinq; æqualibus; illic quidem, quadratum CE maioris, ſuperaddit quadrato CT, quadratum AR,

AR, hoc eſt, quartam partem quadrati AB: Hic vero ſuperadditur eiuſdem quadrati AD Triens. Sed Triens quadrantem ſuperat Vnciâ: unâ igitur unciâ de quadrato AB plus additur hic, quàm illic. Tanto igitur maior eſt Tunica Trunci, limbo cylindri ſuper baſi CE. Quare communi utrinq; cylindro ſuper baſi GT addito, trũcus CTAV, cylindro CEAS maior erit, parte dicta.



Exemplum. Truncus habeat diametros, CT 19, AV 22. Erit, ex prædictis, cylinder CTRS Trunco inſcriptus, ut 361, quadratum de 19. Truncus verò CTAV addet ei Tunicam TRA, CSV, 60. ductâ ſcilicet differentiâ AB. 3. & in CT. 19, & in partem ſui tertiam 1, hoc eſt in 20: fietque corpus Trunci CTAV 421. Medium verò arithmeticum inter 19 & 22 eſt 20 ſemis, & habet quadratum 420 cum quadrante, pro corpore cylindri CE. Nam differentiæ AB 3 dimidium TE, ſeſqui, multiplicatum in minorem TC 19 bis, creat 57: idem TE ſeſqui, in ſeipſum, creat duo cum quadrante. Summa limbi TE circa TC, 59 & quadrans: quem adde cylindro CT 361, prodit, ut dictum, 420 cum quadrante. Cylinder igitur CEAS, minor eſt Trunco CTAV, tribus quadrantibus unius, qui ſunt pars duodecima de quadrato 9, totius differentiæ AB 3.

Corollarium & Analogia.

Auctâ differentia diametrorum Trunci, manente altitudine & cylindro æquealto ſuper eadem diagonio, augetur etiam hic exceſſus trunci. Atqui poteſt augeri differentia AB, uſq; dum fiat æqualis medio arithmetico inter diametros, quando ſcilicet CT in punctum vaneſcit, VA verò fit duplum diametri CE, in baſi cylindri dicti: tunc enim venitur ad terminum truncorum omnium, ſcilicet ad Conum, qui diagonion eandem habet cum latere, creante ſuperficiem Coni.

Talis verò Conus, altitudine eâdem cum cylindro CE, baſi verò, cuius diameter ſit dupla, uti dictum, ad diametrum cylindri CE, eſt ad illum ſuum cylindrum in proportione ſeſquitertia. Cùm enim diametrorum ſit proportio dupla, circulorum erit quadrupla, quare & Cylindrorum æquealtorum ſuper ijs baſibus, ſi cylinder ſtaret ſuper baſi Coni. Per Th III. & XVII. p primæ. At coni corpus, per IV. illius, eſt ſubtriplum Cylindri huius quadranti, baſi ſc. & altitudine iiſdem.

 Hic

Hic igitur terminus eſt, quem nullus Truncus aſſequitur. Nullus inquam truncus Cylindro æquealto, medium arithmeticum habenti in diametro baſis, adjicit partem corporis tertiam.

THEOREMA XIV.

Cylinder æqualis Trunco & æquealtus, maiorem illo diagonion habet.

Nam per præmiſſam, Cylinder eandem habens cum illo, aut æqualem, minor eſt Trunco, ſi æquealtus; maior igitur aliquis, Trunco ſcilicet æquealto æqualis, maiorem etiam habet diagonion.

THEOREMA XV.

Omnes proportiones diametrorum Trunci, locum habentes in coniugatione proportionis certæ, locum etiam habent in coniugatione proportionis maioris.

Nam quia CT, TA in qualibet conjugatione minui poſſunt, ab æqualitate, uſq; dum junctæ fiant æquales ipſi CA : AV verò viciſſim augeri, uſq; dum æquet AC, CV, vel AT, TC, CV quibus ergò conjugationibus minor eſt proportio AT, ad TC, maior ſcilicet AT, reſpectu TC illis etiam plus variari poteſt diametrorum CT, AC proportio. Omnis igitur mutatio proportionis, quæ valet, ubi AT eſt parva, valet etiam, ubi AT eſt maior; ſed ibi ubi AT eſt maior, plures valent.

Propter hunc igitur concurſum Conjugationum variarum, in ijſdem proportionibus diametrorum, locum habet ſequens comparatio.

THEOREMA XVI.

Omnis Cylinder, altior maximo, ſuper eadem diagonio, habet ex Cylindris maximo humilioribus, ſocium ſibi æqualem, quem ſubcontrarium dicemus.

Nam cum proportio baſium permutata eſt proportionis altitudinum; Cylindri æquales exiſtunt. Reſpiciatur igitur Schema XIX, in quo ſit CGA Cylinder maximus, baſi CG, altitudine GA. Sumatur altior illo CHA, dico inveniri humiliorem, ut CBA, cuius BA altitudo, ſit ad HA altitudinem prioris, ut eſt baſis vel quadratum CH, ad quadratum CB. Nam ubi maius datur & minus, ibi datur & æquale. Sed CH quadratum creſcit à quantitate nulla, continuè cum lineis CQ, CI, CH, CG, CB, CP, uſq; ad quadratum diametri CA, faciens proportiones omnis generis. Viciſſim altitudo, initio ſumpto à longitudine diametri AC, decreſcit cum lineis AQ, AI, AH, AG, AB, AP, per omnes itidem proportiones, ſic ut fiat proportio quacumq; data proportione maior, donec altitudo abſumatur

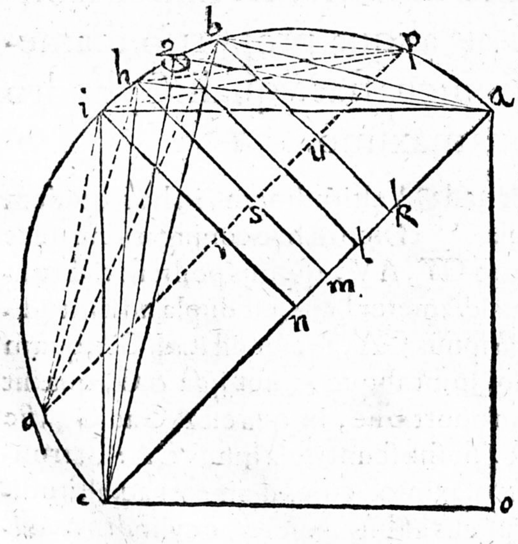
matur in punctum A. Ergò ubi decrementa altitudinum AB, præcipitantur per omnes proportiones, in infinitum creſcentibus proportionum augmentis, ibi incrementa quadratorum CB, magis magis minuuntur, & incrementa proportionum decreſcunt. Et cum detur Cylinder humilior, quàm CHA, idemq; maior eo, ut eſt CGA, eoq; minori proportione HA ad GA, quam quadrati CG ad CH: deſcendendo igitur verſus B, tranſitus erit per aliquod punctum, ubi proportio BA ad HA, quæ prius erat minor, (quippe plus creſcens) fiat equalis proportioni quadrati BC ad quadratum HC, quippe minus creſcens, cùm prius eſſet maior. Exempla ſunt in calculo ad Th. IV. & V. Cylindrorum æqualium.

THEOREMA XVII.

In vna qualibet coniugatione, quæ quadratum diametri habet minus, quam duplum quadrati altitudinis, omnes Trunci ab ipſo Cylindro proximi, paulatim fiunt Cylindro coniugato maiores, non obſtante quod minuitur eorum altitudo, poſtea decreſcunt iterum, ſemper adhuc maiores Cylindro coniugato, quoad altitudinem habuerint maiorem, quam Cylinder coniugati ſubcontrarius.

In Schemate XIX. ſit coniugatio, in qua quadratum diametri HC minus eſt duplo quadrati HA, & Cylinder huius coniugationis CHA; illi verò ſit ſocius, hoc eſt æqualis corpore, ex alia coniugatione, Cylinder CBA, baſi CB, altitudine BA. Dico primùm; omnes Truncos coniugationis CHA, quibus altitudo fuerit inter HA & BA, maiores eſſe Cylindris CHA vel CBA. Nam inter ſocios, CHA, CBA æquales, intereſt Cylinder maximus CGA, in quo quadratum CG eſt duplum quadrati GA. Omnes igitur Cylindri CGA, inter CHA & CBA, ſunt maiores extremis ad H & B terminatis, per Th. V. huius: Et habent ij altitudines medias inter HA & BA, quemadmodum & Trunci. Per XIII. verò huius, Trunci æquealti Cylindris ſuper eàdem diagonio CA, ſunt iis maiores. Quare multò maiores ſunt extremis minoribus ad I, B, terminatis.

Schema XIX.



 Theo-

THEOREMA XVIII.

In coniugatione proportionis dupla minoris, Truncus æqualis Cylindro coniugato, habet altitudinem, minorem altitudine Cylindri, qui coniugati ſocius, eidemq; æqualis eſt, coniugationis tamen diverſæ.

Nam truncus æquealtus tali ſocio cylindro, qui conjugato ſit æqualis, maior eſt illo, per XIII. Maior igitur eſt etiam conjugato ſuo cylindro. Qui igitur coniugato ſuo eſt æqualis corpore, non erit eiuſdem cum illo altitudinis. Aut igitur altior aut humilior. Non verò altior, per XVII. præmiſſam: Ergo humilior. Ex eo verò Trunci, per X huius, fiunt minores cylindro conjugato, donec tandem evaneſcant.

Corollarium.

Poſito quod dolia conſtent puro Trunco conico duplicato: dolia oblonga, ventribus modicis, capaciora ſunt cylindricis eàdem figuræ longitudine, ventre carentibus: nunquam verò fit, ut habeant ventres adeò immanes & prodigos, per quos rurſum fiant minus capacia dolijs cylindricis eàdem figuræ longitudine.

THEOREMA XIX.

In omnibus conjugationibus Truncorum & Cylindri, quibus diameter baſis minoris, eſt minor ſemidupla lateris acclivis, datur bis aliqua proportio diametrorum Trunci, per quam Truncus fiat æqualis Cylindro ex omnibus conjugationibus maximo.

Sit GC, diameter baſis Cylindri, ad GA altitudinem (in hoc quidem Theoremate) minor quàm ſemidupla. Dico in hac conjugatione duas occurrere proportiones diametrorum GT, AV, quibus poſſit fieri Truncus æqualis cylindro maximo, cuius diameter baſis, eſt dupla ad altitudinem. Nam ſi GC minor eſt ſemiduplà ipſius GA, maior eſt itaq; GA, quàm ſubſemitripla ipſius CA: poteſt itaq; ſumi aliqua minor ipſà AG, quæ ſit AT, & ad AT comparari TC, in ea proportione, in qua eſt AG ad GC; ſic ut perpendiculum ex T, hoc eſt TR, ſit ſubſemitripla ipſius CA: Et truncus ATCV, fiet æquealtus cylindro maximo cuius diameter ad altitudinem ſemidupla. Erit itaq; talis truncus adhûc maior hoc cylindro maximo, per Th. XIII. huius partis. Et quia, per XIV. huius, cylinder æquandus, ſi fuerit Trunco æquealtus, diagonium habet maiorem: diagonium igitur habens minorem, ſcilicet eandem cum Trunco æquali futuro, debet habere altitudinem Trunco maiorem, ut quod amiſit, abbreviatione

diago-

diagonij, recuperet incremento altitudinis: Id eſt, Truncus illi futurus æqualis, debet fieri minor eo, qui eſt æquealtus cylindro maximo, ſuper eadem diagonio conſtructo. Id autem fieri poteſt duobus modis. Etenim, cum Cylinder in vna qualibet conjugatione ſit Truncorum omnium principium: Sit verò in conjugationibus hic propoſitis, cylinder minor cylindro maximo, erunt etiam Trunci, à cylindro ſuo conjugato proximi, eòq; altiores, cylindro maximo minores. Inde verò per augmentum AB differentiæ diametrorum CT, AV, creſcunt, uſq; dum fiant maiores cylindro maximo, ut jam eſt demonſtratum. In hoc igitur incremento ipſius AB, quoad TR minor fuerit altitudine GA, cylindri ſui conjugati, maior verò altitudine cylindri maximi; contingit ſemel, Truncum æqualem fieri cylindro maximo. At non creſcunt in infinitum trunci eiuſdem conjugationis, creſcente AB, ſed per X & XVIII huius, iterum decreſcunt: qua in variatione contingit ſecundò, Truncum fieri æqualem cylindro maximo. Et quia, qui æquealtus erat maximo (cuius TR ſub-ſemitripla ipſius AC) maior erat illo maximo; minoris igitur factus altitudinis, quàm cylinder maximus, fiet illi aliquando iterum æqualis. Adhuc igitur eſt minuenda TA amplius. Minutâ vero TA, & cum ea TC proportionaliter, minuitur quadratum TA: Manet vero quadratum CA: augetur igitur rectangulum TC, AV reſiduum: ſed eius latitudo TC minuitur, ut dictum: viciſſim igitur, & duobus quidem nominibus, augetur longitudo rectanguli AV: qua ratione conſtituitur proportio certa TC ad AV, qua uſus Truncus, fit æqualis cylindro maximo ſecundò. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XX.

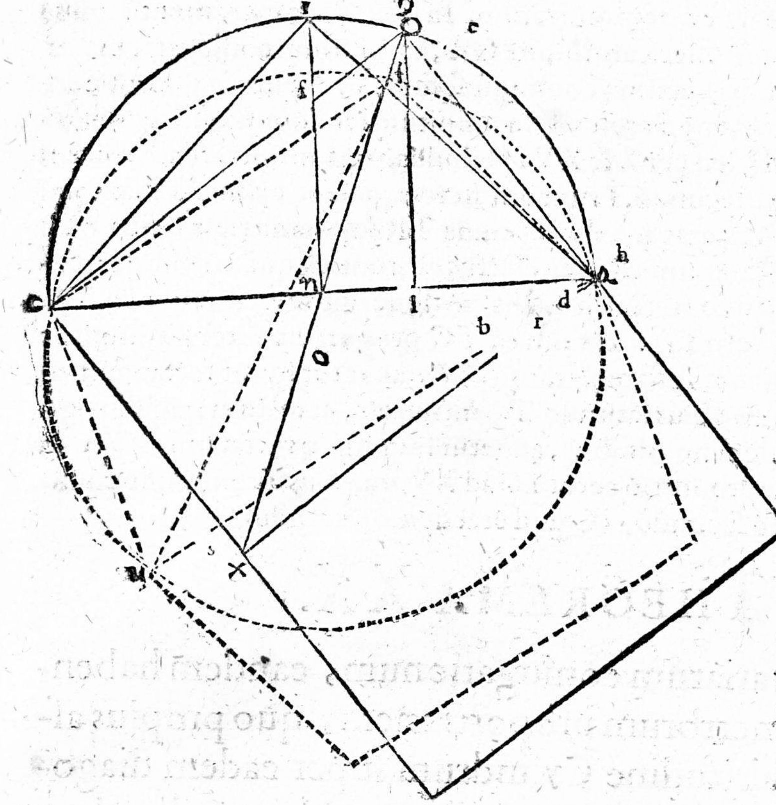
Trunci variarum coniugationum, eandem habentes inter ſe diametrorum proportionem, quo propius aſſecuti fuerint altitudine Cylindrum ſuper eadem diagonio maximum, hoc erunt maiores; quo altiores illo, hoc minores.

Inopinabile & hoc eſt. Quis non dixerit maiorem eſſe Truncum, cuius altitudo ſit IA, trunco alio, cuius altitudo GA: ſi eadem utriq; diagonios CA, eademq; proportio baſium minorum ad maiores? Atqui diverſum eſt verum. Sit enim Cylinder maximus, cuius CG diameter baſis, ad GA altitudinem, per Th. V, ſemidupla: & ſit truncus, cuius diameter minor in CG lineâ, maior in AX (continuatâ) ſitq; earum proportio quæcunq;, mediumq; inter illas arithmeticum GC, per Th. XII. Cùm igitur baſium binarum inter ſe per diverſos Truncos eadem ponatur eſſe proportio: erit etiam differentiæ earum ad medium arithmeticum proportio per omnes eadem. Ac cum omnis talis Truncus ſuperet cylindrum æquealtum in proportione Vnciæ de quadrato differentiæ diametrorum trunci, ad quadratum medij eorum arithmetici, per Th. XIII. huius; maior igitur erit hic exceſſus trunci, ubi maior cylinder. Sed cylinder CGA eſt omnium,

ſuper

ſuper eâdem diagonio maximus: ergo exceſſus Trunci huius ſeu Vncia dicta, erit omnium reliquarum per reliquos truncos, eandem diametrorum proportionem habentes, maxima. Ac proinde, quamvis maior ſit altitudo trunci quam GA: quia tamen minor cylinder huius altitudinis; minor etiam erit truncus.

Verbi cauſa, ſumatur proportio diametrorum trunci omnium maxima, hoc eſt, infinita, ſumatur inquam Conus pro Trunco, finis omnium truncorum. Sit Coni altitudo IA, cuius quadratum eſt ſemiſſis quadrati AC. Sitq; baſis cylindri CIA æquealti, linea CI æqualis altitudini AI. Et quia CI eſt mediũ arithmeticum inter diametrum trunci, earum verò altera eſt o, erit igitur reliqua, ſc. diameter baſis Coni, dupla ipſius CI. Hic igitur pro corpore huius coni ducenda eſt pars tertia de AI in quadratũ duplæ CI, quod eſt quadruplum quadrati CI: duplum ergo quadrati CA.



At Conus alius (rurſum pro trunco eiuſdem proportionis diametrorum) altitudinem habens GA, cuius quadratum eſt triens de quadrato CA, ſimiliter duplam ipſius GC, habebit diametrum baſis, quadratum ergò quadruplum; Eſt autem quadratum GC bes quadrati AC; quatuor ergo beſſes, ſunt octo tertiæ, quæ duplum ſeu ſex tertias prioris coni ſuperant duabus tertijs, cum ècontra illius quadratum altitudinis, ſemiſſem habens quadrati CA, huius altitudinis quadratum, quod eſt triens quadrati CA, ſuperet tantum unâ ſexta quadrati CA. Nec hoc tamen detrimentum omne eſt cenſendum: quia non quadrata, ſed altitudines ipſæ ducuntur in baſes; imò nec altitudines ipſæ, ſed trientes tantùm. Maius igitur lucrum eſt Coni in baſi CG longiori, quam damnum in GA altitudine breviori.

THEOREMA XXI.

Ex omnibus truncis conjugationis eiuſdem, maximus eſt ille, qui habet altitudinem Cylindri maximi, ſubſe-

ſubſemitriplam ſcilicet Diagonii: Ab hoc vero faſtigio cæteri omnes, tam qui altiores, quam qui humiliores, iterum decreſcunt.

Demonſtrationem legitimam aut refutationem, ſi opus eſt, expediant, Snellius, aut Adrianus Romanus, Apollonii Belgæ. Parergon quidem eſt hic, & Epiſagma, quod ſcopum attinet libelli; cognationis tamen cauſa cum præcedenti hîc adſcriptum: cuius ſimilitudo cum hoc, primam mihi fidem fecit: etſi trunci præcedentis Th, non ſic coniugati ſunt, ut nos hactenus hanc vocem uſurpavimus; ſuper eadem tamẽ & ipſi diagonio ſunt deſcripti, & habent eandem inter ſe proportionem baſium: quemadmodum cæteri coniugati habent eandem inter ſe proportionem diametri baſis minoris ad latus acclive.

Altera dixis eſt ex proprietate coniugationis cylindri maximi, & quod in præcedentibus demonſtravi, eſſe aliquam altitudinem trunci coniugati, maiorem altitudine cylindri maximi, aliquam illà minorem: quarum utrarumq; trunci ſint æquales cylindro maximo: illum ipſum verò, qui eſt æquealtus maximo, truncus cylindro, corpus habere maius: & utrinq; tam verſus cylindrum coniugatum, quam verſus truncos humilimos, decreſcere truncos. Cauſa igitur nulla apparet, cur alibi in vicinia conſiſtat meta corporis incrementorum, quam in hac ipſa.

Adde indicium calculi. Sit coniugatio, in qua diameter CI, æquet altitudinem IA, & ſit huius coniugationis truncus, æquealtus cylindro CGA, hic maximo, ſc. cuius diameter CG, ſemidupla ad GA altitudinem. Ergo minor trunci diameter erit in CG, eſt autem æqualis lateri acclivi, quippe ponitur ad id eſſe, ut CI, ad IA. Eſt igitur CF diameter minor, ſecans IN, perpendicularem ex centro N, in puncto F, & FA latus acclive. Vt igitur CL ad CG ſic CN ad CF. Sed CL eſt bes de CA, & quadratum CL quatuor nonæ de quadrato CA; & quadratum CN eſt quarta pars de quadrato CA, deniq; quadratum CG eſt bes de quadrato CA. Vt autem CL, quatuor nonæ, ad beſſem CG, ſic pars quarta CN ad CF tres octavas. Ergo quadratum CF erunt tres octavæ quadrati CA: tantum verò eſt etiam quadratum altitudinis FA. Ablatæ igitur tres octavæ de quadrato CA, relinquunt quinq; octavas, rectangulo ſub CF diametro minore & oppoſita diametro maiore, quæ cum AX coincidit, excurrens ultra X. Cùm ergo quadratum CF, & rectangulum diametrorum CF & maioris, habeant latitudinem eandem CF; longitudines earum erunt ut plana ipſa, ſcilicet ut tria ad quinq;. Hæc eſt igitur proportio diametrorum trunci qui ex hac coniugatione eſt æquealtus cylindro maximo. Quare, per XIII huius, ut quadratum 15, medii eorum arithmetici 4, ſc. ipſius CG, ad Vnciam quadrati 4, differentiæ diametrorum 2, (vncia verò de 4 eſt triens) ſic corpus cylindri CGA maximi ad exceſſum CFA trunci æquealti: truncus ergò excedit cylindrum maximum triente unius ſedecimæ, ſeu parte quadrageſima octavâ corporis cylindri CGA. Quæratur igitur proportio cylindri maximi CGA ad cylindrum coniugatum CIA. Eſt quadratum baſis CI, ſemiſſis quadrati CA; ſed quadratum CG, eſt bes quadrati CA: quare proportio baſium CI ad CA ut 3 ad 4. Viciſſim quadratum altitudinis IA eſt ſemiſſis,

quadratum altitudinis GA eſt triens quadrati CA: proportio igitur quadratorum, IA ad GA eſt ea quæ 3. ad 2. vel quæ 9 ad 6: ipſarum igitur linearum IA ad GA ꝓportio eſt dimidia, ſc. quę 30000 ad 24495- vel huius ad 20000. Componitur autem proportio corporum ex proportione baſis & proportione altitudinum. Ductis igitur in ſe mutuò terminis analogis, proportio cylindri CIA ad cylindrum CGA, ꝓvenit eadem, quę 9000 ad 9798-. Supra Theor. III, Columnarum ex his conjugationibus, proportio erat quæ 2828- ad 3080-. Quòd ſi hunc numerum cylindri CGA, commuto in 36, ſeu in 48 trientes, numerum priorem, erit in hac proportione numerus cylindri CIA 44. Eſt ergo cylinder CIA, ad truncum CFA conjugatum, ut 44 ad 49, & truncus maior parte paulò plus nonâ. Id verò conſonum eſt huic Theorematí & Corollario III. Th. IX. huius partis; ibi enim cum eſſet proportio diametrorum, quæ 2 ad 3, hoc eſt quæ 20. ad 30, truncus excedebat parte paulò plus undecimà, creſcens: crevit igitur uſq; dum eſſet proportio quæ 3. ad 5, id eſt, quæ 18 ad 30, tunc maximè truncus exceſſit parte plus nonâ, ut hic probatum. Vlterius, quando fuit proportio, quæ 3. ad 2, hoc eſt quæ 15 ad 30, truncus iterum decrevit, ut excederet parte tantum nonà. Quod igitur in vna conjugatione fit, ut truncus æquealtus cylindro maximo, plurimum excreſcat ſuper cylindrum conjugatum, id in omnibus fieri conſentaneum eſt.

THEOREMA XXII.

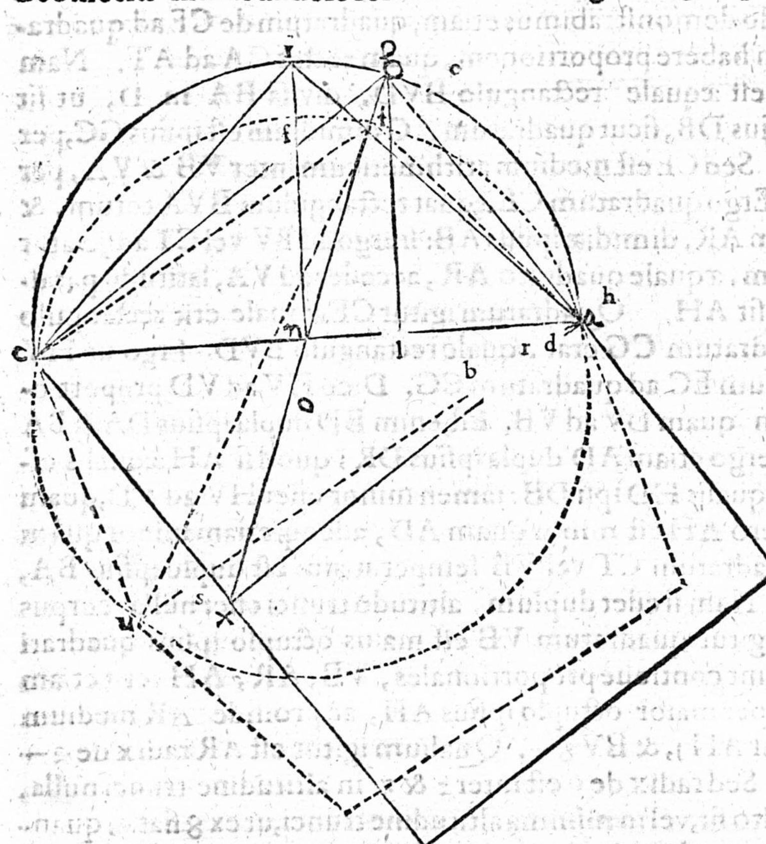
In conjugationibus, quæ quadratum diametri habent duplum quadrati altitudinis aut maius, trunci omnes ſunt minores cylindro maximo, conjugato ſcilicet ſuo: & hoc tanto plus, quanto receſſerimus à proportione dupla.

In Schemate XIX. ſit CGA. conjugatio proportionis duplæ quadrati CG ad q. GA, & ſit CA ꝓportionis minoris, & ſubcontrarij cylindri ad H & B: ſunt igitur omnes cylindri inter H & B, & proinde etiam trunci illis æquealti, maiores cylindro ad H vel B terminato, & paulo infra B uſq; in A, omnes trunci minores cylindris H & B, per XV, & XVI præmiſſas.

Quo propius verò fuerit H ipſi G, hoc etiam propius erit B ipſi G, & hoc minor arcus HB, in quo trunci maiores: tandem ergò cylinder CGA eſt idem, ipſe & ſuus ſubcontrarius, vicem & H & B ſuſtinens. Quemadmodum igitur omnes cylindri poſt B, minores ſunt ipſo I, & trunci omnes paulò infra B, ſic etiã hic omnes cylindri poſt G, & cum ijs trunci æquealti, erunt minores ipſo CGA conjugato. Quod enim illic trunci non in B ſed paulo infra B incipiunt evadere minores; cauſa eſt, quia in ipſo B datur cylindro truncus æquealtus, conjugationis CIA. At hic in ipſo G, non datur truncus cylindro æquealtus ex conjugatione CGA; primi igitur à Cylindro CGA trunci, ſtatim ſunt humiliores lineà GA, plus amittentes per altitudinem, quam acquirant per adjectionem trientis.

Eadem analogia apparet etiam ſic. Nam trunci conjugationis hujus, omnes ab ipſo Cylindro, ſunt illo humiliores, quippe conjugationis ſuæ capite. Qui cum ſit ipſe Cylindrorum maximus, omnes igitur ei conjugati Trunci ſunt eo ordine minores, per Th: XXI. quo ordine abſunt ab altitudine illius: maximus igitur inter illos Cylinder ipſe: quippe ſeipſum ſolus inter illos, æquans altitudine.

Hæc eſt demonſtratio inconvincibilis per analogiam, ſed quia Geometræ minus aſſuefecerunt ſe ad analogias, age operoſiorem & planè Geometricã tentemus demonſtrationem, revocato Schemate XXI: In quo ſit truncus CTAV, cõjugatiõis CGA: & continuetur CT, donec ſecet circulum in E: connectanturque puncta EA, cylinder ergo CEA minor eſt cylindro CGA, per Th. V. Ei verò æquealtus eſt Truncus CTAV, ex conſtructione, quia EA, TR, æquales. Maior eſt igitur truncus cylindro CEA, triente quadrati de AR, per



XIII. præmiſſam. Probandum eſt, proportionem GA ad AE maiorem eſſet, quam proportionem quadrati CE cum triente quadrati AR vel ET, ad quadratum CG; ſic ut cylinder CEA plus amiſerit per humilitatem EA, quam lucratus eſt per trientem quadrati ET. Primùm itaq; quadratum TR vel AE minus eſt quadrato TA, ipſo quadrato toto AR.

Sed & quadratum CE minus eſt quadrato CE cum triente quadrati AR, ipſo hoc triente quadrati AR. Differentiam igitur illic inter terminos, facit aliqua quantitas, quæ eſt tripla quantitatis, quæ hic terminos differre facit. Et ſunt præterea hi termini maiores duplis illorum terminorum. Nam cùm quadratum CG ſit duplum quadrati AG, hic quadratum CE, maius eſt quadrato CG, & quadratum AE, minus quadrato GA. Cùm autem inter aliquos terminos ut 25. 26. differentiam facit aliqua quantitas, ut 1, eius vero quantitatis triplum, ut 3, differentiam facit inter terminos, minores dimidijs, vel ſaltem poſteriorem poſterioris dimidium, ut inter 10. 13. proportio minorum terminorum, eſt maior ſextuplà proportionis maiorum; ut 10 ad 13, vel 20 ad 26, proportionem habet maiorem, quàm ſextuplam proportionis 25 ad 26: & multo eſſet maior, ſi etiam poſterior terminus 13 minor fuiſſet dimidio poſterioris 26. Manente enim æquali differentia, quo minores fiunt termini, hoc magis augetur proportio. Eſt ergo proportio quadrati TA ad quadratum TR vel EA, maior ſextuplâ proportionis quadratorum CE & trientis de AR, ad CE. Ipſarum

rum igitur linearum TA ad TR vel EA, proportio eſt maior tripla quadratorum CE & trientis de AR ad quadratum CE.

Eodem modo demonſtrabimus etiam, quadratum de CE ad quadratum CG minorem habere proportionem, quam rectas GA ad AT. Nam quadratum CG eſt æquale rectangulo BVD, diviſa BA in D, ut ſit AD dimidium ipſius DB, ſicut quadratum AG dimidium eſt ipſius GC, per Th. VII. huius. Sed CE eſt medium arithmeticum inter VB & VA, per Th. XII. huius. Ergo quadratum CE æquat rectangulum BVA totum, & inſuper quadratum AR, dimidiæ ipſius AB: ſi ergo ad BV vel CT adjciatur parallelogrammum, æquale quadrato AR, accedet ad VA, latitudo parallelogrammi, quæ ſit AH. Quadratum igitur CE æquale erit rectangulo BVH. Sed & quadratum CG erat æquale rectangulo BVD. Ergo ut HV ad VD, ſic quadratum EC ad quadratum GG. Dico HV ad VD proportionem eſſe minorem, quam DV ad VB. Eſt enim BD dupla ipſius DA, & BA dupla ipſius AR: ergo etiam AD dupla ipſius DR; quod ſi AH æqualis eſſet ipſi AD, eoq; æqualis HD ipſi DB: tamen minor eſſet HV ad VD, quam DV ad VB: Iam verò AH eſt minor quàm AD, adeoq; etiam minor quàm DR. Nam quadratum CT vel VB ſemper maius eſt duplo ipſius BA, per Th. X. huius. Nam ſi eſſet duplum, altitudo trunci eſſet nulla, corpus nullum: ſemper igitur quadratum VB eſt maius octuplo ipſius quadrati AR. Cùm igitur ſint continuè proportionales, VB, AR, AH, erit etiam ipſa recta VB ſemper maior octuplo ipſius AH, ac proinde AR medium proportionale inter AH 1, & BV 8 +. Qualium igitur eſt AR radix de 8 + talium AH eſt 1. Sed radix de 8 eſt inter 2 & 3. in altitudine trunci nulla, corpore nullo, & cito fit, vel in minima altitudine trunci, ut ex 8 fiat 9, quando radix eius eſt 3, & in altitudinibus maioribus ſemper maior. Ergo AH ubi maxima, inter dimidiam & tertiam partem ipſius AR conſiſtit, fitq; per augmentum altitudinis truncorum conjugatorum, quacunq; parte ipſius AR minor, ſic ut tandem cum ipſa AB evaneſcente (trunco in merum cylindrum tranſeunte) fiat infinitæ parvitatis portio de AR. Atqui ſi abſq; AH eſſet, proportio AV ad VD eſſet minor dimidia ipſius DV ad VB, quia AD eſt dimidium ipſius DB: & cùm proportio DV ad VB ſit dupla ipſarum GC ad CT, vel GA ad AT: ergo ſi abſq; AH eſſet, proportio AV ad VD, & ſic etiam quadratum EC ad quadratum CG, ſemper eſſet in minori proportione, quam rectæ GA ad AT.

Cùm autem inter AR & AH, per diverſos truncos, ſint omnis generis pportiones: fit alicubi, ſc. in truncis proximè æquealtis cylindro, ut AH non tantum adjiciat, ut proportio HV ad VA æquet proportionem GA ad AT. & tunc res eſt certa, duo enim elementa ſunt proportionis GA ad AE, alterum AT ad EA vel TR, alterum GA ad AT, duobus elementis proportionis, quadrati GE cum triente quadrati AR, ad quadratum GC, ſingula ſingulis maiora.

In truncis igitur proximis à cylindro conjugato decrevit altitudo maiori proportione, quam qua crevit baſis cylindri, æquantis truncum: atq; hoc ſolum demonſtrandum fuit, dato enim initio truncorum cylindro minorũ, deinceps trunci continuè minuuntur, donec evaneſcant. Sequentes

tes tamen caſus pertinent ad demonſtrationis maiorem evidentiam.

Vel æquatur proportio HV ad VD proportioni GA ad AT, in truncis humilioribus; & ſic proportionum dictarum elementa poſteriora, ſunt æqualia, ſed priora adhûc inæqualia, & plus triplo maior exceſſus rectæ AT ſuper TR, in comparatione cum TR, quam triens quadrati AR, in comparatione cum quadrato GE, & id ſine compenſatione; tota igitur altitudinum proportio, adhûc maior eſt proportione altitudinis baſium.

Vel deniq; ſuperat proportio HV ad VB, proportionem GA ad AT, ſed in truncis adhuc humilioribus, quando CE longa efficitur, TR brevis: ubi quadratum AR magis magisq; æquatur quadrato TR, idq; tandem ſuperat, magnam efficiens proportionem inter TR & TA; quæ quidem ſtatim initio, & ſemper, eſt maior triplo proportionis inter quadratū CE cum triente quadrati AR, & inter ſolitarium quadratum CE: cum econtra triens quadrati RA, non in eodem proportionis incremento, augeat quadratum CE, quippe hoc ipſum per ſe creſcens. Et cùm citò fiat, ut elementum proportionis altitudinum, quod eſt proportio AT ad TR, fiat maior tertia parte proportionis GA ad AT: ex eo deinceps ſemper fit, ut exceſſus elementi huius in proportione altitudinum, non tantum compenſet, ſed etiam ſuperet magis magisq; exceſſum elementi illius, in proportione baſium: Hic enim totus as creſcens quadrati AR, auget proportionem terminorum minorum & decreſcentium; illic triens ſaltem, æqualiter creſcens, auget proportionem terminorum maiorum & creſcentium. Plus igitur hic poteſt proportionis augmenti pars tertia, quam illic totum proportionis augmentum.

Hæc igitur de illa conjugatione fuerunt demonſtranda, in qua quadratum CG, duplum eſt quadrati GA. Quod ſi quadratū CG fuerit maius duplo illius; multo iſta omnia magis obtinent. Nam quod analogiam attinet, Truncorum talium cylindri æquealti, (in Sch. XIX. CBA) ſunt æqualium ſed altiorum cylindrorū CHA ſubcontrarij, de quibus Th XVIII. demonſtratum, quod trunci ab illis incipiant fieri minores, etiam ij, qui cylindros altos CHA conjugatos habent: quanto magis illi, qui ſunt cum his illorum ſubcontrarijs CBA, conjugationis eiuſdem, & qui hic demum oriuntur, primo ortu facti humiliores conjugato cylindro CBA.

Iam verò quod reliquam domonſtrationem concernit: cùm in Schemate XXI, cylindri ipſi, conjugationum capita, ponantur humiliores eſſe cylindro GA: creſcit igitur in ijs CG, ſed incrementis decreſcentibus, minuitur GA ſed decrementis creſcentibus. Diminutà verò GA & ſecundum eam & TA, etiam AB differentia diametrorum, licet creſcentium, creſcit, ſed incrementis decreſcentibus, per Th. X. huius Fit igitur diminutio corporis cylindri conjugati, per curtationem ipſius TR, magna, quippe & ſecundum baſin CG magnam, & ſecundum differentiam ipſium TR & AG multo maiorem: appoſitio verò ad corpus cylindri conjugati, ſecundum Trientem quadrati AR, & augmentum quadrati CE per BA, fit parva & minoris æſtimationis. Retexat, qui vult, omnia demonſtrationis præmiſſæ elementa adhunc modum; inveniet non minus lucis, quam ſupra Th. IX. huius, ex calculo emicuit, ſuper huius partis veritate.

 Corol-

Corollarium.

Poſito, quod dolia Vinaria conſtent truncis conicis puris, in iis quidem, quæ curta ſunt, venter omnis diminuit æſtimationem capacitatis; in Auſtriacis verò perinde ferè eſt, ſive ventrem habeant, ſive cylindricam figuram propius imitentur: quia nunquam uſu venit, ut venter in tantam excreſcat amplitudinem, ut habeat profunditatem duplam diametri orbis lignei: quo caſu ſanè, per Corollaria ad Th. IX, amitteret plusquàm quartam partem. Sed nec unquàm profunditas fit ſeſquialtera diametri orbis lignei, quo caſu venter amitteret partem circiter triceſimam. At ſi ſeſquitertia, quod valde inſolens, jam attenuatum eſt damnum ventris ad partem ſeptuageſimam.

Atq; hæc eſt altera illa, & nobiliſſima quidem proprietas dolij Auſtriaci. Sicut enim Th. V. nihil magnum potuit ei nocere variata nonnihil figura per errorem artificis, propterea, quod Lege & More ducibus, ad figuram omnium capaciſſimam aſpiravit artifex, incidens in figuras capaciſſimæ proximas, in quibus, ut proximis, defectus, ex legibus circuli, non eſt obſervabilis inter initia: ſic nunc etiam nihil ferè in hoc dolio variat venter amplus an ſtrictus, res cumprimis grata opifici; quia non ita facile eſt, ut proportionem tabularum ad orbes, ſic ventris amplitudinem pro lubitu exprimere: nec ad amuſſim prævidet, quantus dolij venter ſit evaſurus, redigereturq; in anguſtum, ſi lex amplitudinem certam ventrium præſcriberet. Quòd igitur lege tali tam moleſtâ non eſt opus, id commoditati proportionis Tabularum ad Orbes, quam obſervat Auſtria, acceptum eſt ferendum.

THEOR. XXIII. Problema Geometris propoſitum.

Data proportione diametrorum Trunci, coniugationem invenire, in qua talis truncus æquet Cylindrum conjugationis maximæ.

Primùm in ipſa conjugatione Cylindri maximi, jam truncus omnis, & ſic etiam truncus datam habens proportionem diametrorum, eſt minor cylindro maximo, per Th. XXI. huius. Ergo coniugatio quæſita, eſt ſupra G, conjugationem cylindri maximi, verſus conjugationẽ trunci, maximo æquealti, datam diametrorum proportionem habentis. Vt ſi truncus æquealtus cylindro maximo CGA, fuerit CFA, & conjugatus ei cylinder CIA, Fuerit verò etiam in conjugatione CGA, truncus CTA, & fuerit, ut CF ad diametrum oppoſitam parallelam per AX, ſic etiam CT ad AV, corpus trunci CTA, conjugationis G, minus erit cylindro maximo CGA. Coniugatio ergo quæſita cadet ſupra conjugationem G, verſus I. Quare quæſitus truncus habebit altitudinem maiorem quam GA. Et cylindri æque-

alti

alti diameter baſis, quæ medium eſt arithmeticum inter diametros trunci quæſiti, longitudinem habebit minorem quam CG. Dico conjugationem quæſitam eſſe etiam ultra I, & altitudinem trunci quæſiti maiorem quàm AI, quod mirum videatur. Nam quia datur proportio diametrorum trunci, ſemper etiam datur earum proportio ad medium ſuum arithmeticum. Vt igitur CF ad CG, ſic erit etiam quæſiti trunci diameter minor, ad ſui æquealti cylindri diametrum. Atqui minor hæc eſt, quàm CG, & remotior ab A: minor igitur etiam illa, quàm CF, & remotior ab A: minor ergo proportio CF ad FA, vel CI ad IA, quam diametri trunci quæſiti ad latus ſuum accliue, hoc eſt, diametri cylindri conjugati ad ſuam altitudinem. Maior ergo quæſitæ coniugationis altitudo, quàm AI, minor diameter, quàm IC. Hactenus demonſtratio: reliquum huius Problematis Adriano Romano, & ſi quis alius eſt, cui Geber placet, expediendum tranſmitto.

Cùm enim truncus omnis ſit maior cylindro ſuo æquealto, in proportione Vnciæ de quadrato differentiæ diametrorum, ad quadratum diametri cylindri æquealti: Quare quadratum CA ſic jubemur dividere, ut pars vna, aucta portione per differentiam diametrorum datâ, & ducta in latus partis alterius, æquet quadratum CG, ductum in rectam GA. Conſultus hac de re Geber, reſpondit ex Coſſa ſua, inveniendam altitudinem tantam, ut, tribus poſt illam continuè proportionalibus exiſtentibus, in proportione, ut eſt ipſa ad CA, primæ aliqua certa multitudo, æquet datum numerum abſolutum, cum aliqua certa multitudine tertiarum: huiusmodi verò æquationes in Geometria adhuc quærunt coſſiſtæ, nec, me iudice, invenient unquam.

THEOR. XXIV. Problema Geometris propoſitum.

Data coniugatione, in qua quadratum diametri in baſi Cylindri, minus eſt duplo quadrati altitudinis, invenire proportiones duas diametrorum, quæ Truncos coniugationis eiuſdem efficiat æquales Cylindro maximo.

Data ſit coniugatio CIA, in qua quadratum CI, minus ſit duplo quadrati IA, oportet invenire truncorum coniugatorum diametros, æquantium cylindrum CGA maximum. Erit igitur altitudo trunci unius, maior quàm GA altitudo cylindri maximi, alterius minor, per XXI, huius. Per conſequens igitur, illius proportio diametrorum erit minor proportione diametrorum æquealti cylindro CAG maximo, huius maior: uterq; ſuum habebit cylindrum æquealtum: qui non erunt ſubcontrarii ipſi, ſed ſubcontrariis proximi: quia ſi eſſent ſubcontrarii, eſſent æquales, per XVI huius. At cùm illorum trunci ſint proportionis inæqualis diametrorum, quippe in eadem coniugatione diverſas habentes altitudines; inæquales igitur adjicerent vncias quadratorum, differentiis ſuis, per XIII huius: itaq; trunci ipſi fierent inæquales. At requirimus æquales, utrumq; quippe uni CGA æqualem.

Hactenus demonſtratio: reliquum Coſſiſtæ conficiant. Data enim eſto CF, quæ quæritur: datur igitur & FA ex conjugatione, & quadratum eius: quare & rectangulum diametrorum, & hoc diviſo per datam CF diametrum minorem, etiam diameter maior: quare nota erit & differentia maioris & minoris, & eius quadrati vncia, & quadrans; quo ſubtracto à quadrato AF, reſtabit quadratum altitudinis; quod cum quadrato GA comparatum, oſtendet corporum proportionis partem unam. Sic data utráq; diametro, datur cylindri, qui habet trunci CFA altitudinem, diameter baſis, eius ſc: quadratum, per XII huius: cui adjecta Vncia prius inventa, facit compoſitum, quod cum quadrato CG comparatum, oſtendet corporum proportionis partem alteram: Oportet verò partes iſtas proportionis corporum, eſſe ſubcontrariè æquales, ut in unum conflatæ conſtituant proportionem æqualitatis.

Tollite Coſſiſtæ, quam fixi, crucem ingenij, & me ſequimini: invenietis, niſi me averſa reſpexit Minerva, continuè proportionalium primas ſecundas & quintas, æquari numero abſoluto cum proportionalium tertijs & quartis, certo quibusq; numero ſumptis. Nec igitur Geometrica eſt æquatio, ſed ſtochaſtica Nic. Raimari Vrſi, aut mechanica Iuſti Byrgij: nec problema, qualia Pappus ex more antiquorum, Plana appellavit, id eſt, abſolutè Geometrica & ſcientifica; ſed ſolidum, & cum conditione Geometricum, datis ſc. duabus medijs, continuè proportionalibus, quod explicatum ſcientificum habet nullum. Et præterea non una eſt reſolutio huius æquationis: demonſtratum enim eſt, Truncos huiusmodi eſſe duos.

THEOREMA XXV.

Si diverſarum conjugationum Trunci habuerint eandem inter ſe proportionem diametrorum, conſtituti ſuper eadem diagonio: proportio corporum erit compoſita ex tribus elementis, ex proportione Cylindrorum coniugationis, & ex proportionibus Cylindri cuiusq; ad ſuum Truncum conjugatum, prioris quidem Cylindri everſa, poſterioris vero directa.

Sit truncus CFA, conjugationis CIA, truncus verò CTA, conjugationis CGA, ſuper eadem diagonio CA; & habeat ſe CF ad diametrum maiorem per AX prolongatam, ſicut ſe habet CT ad AV: dico corporis CFA proportionem ad corpus CTA trunci, compoſitam eſſe ex proportionibus tribus, 1. CIA ad CGA, 2. CFA ad CIA, 3. CGA ad CTA. Simplex eſt ſubſumptio ad axioma tritiſſimum, quod quatuor quantitatibus ordine collocatis, proportio primæ ad quartam, ſit compoſita ex proportionibus interjectis: tantum in collocatione cautio eſt adhibenda: quia enim de proportione ſatagimus truncorum inter ſe, oportet truncorum alterum collocare loco quarto, alterum loco primo, cylindros in medio, cuiq; ſuum coniugatum proximum. Nam per Coroll. ad Th. III. columnarum, & ſic

ſic etiam cylindrorum datur proportio, ſc. CIA ad CGA. Sed per Th. IX. datur proportio everſa CIA ad GFA, ſcilicet CFA ad CIA, & proportio directa CGA ad CTA: datæ verò proportionis corporibus deinceps collocatis, reſultat dicta ſeries,

Corollarium & Praxis.

Ritè collocatis terminis, quibus exprimuntur proportiones tres, multiplica tres antecedentes, duos inter ſe & factum in tertium; ſic etiam age cum tribus conſequentibus, & comprehendent, qui prodeunt, proportionem quæſitam.

Sit CIA coniugatio æqualitatis, CGA coniugatio proportionis ſemiduplæ linearum, duplæ quadratorum. Eſt igitur in Corollario Th. III. proportio CIA ad CGA ut 2828 ad 3080. vel 101 ad 110. In Corollario verò I ad Th. IX. cum eſt proportio diametrorum, quæ 1 ad 2: Truncus eſt ad cylindrorum priorem CIA ut 60 ad 54, hoc eſt ut 10. ad 9. In Corollario altero, cum eſt eadem proportio diametrorum quæ 1. ad 2, cylinder poſterior CFA eſt ad Truncum ut 15 ad 11 +, Ergò

Truncus. Cylindri. Trunc⁹. Termini Antec. 10. 101. 15. factus 15150 Truncus CFA
10. — 9. | 15 — 11 + conſeq. 9. 110. 11 + fact⁹ 10890 + Tr. CTA;
101 — 110 In minimis, ut 505 ad 363 + ſic Truncus CFA ad Tr. CTA.

Corollarium II.

In coniugationibus Æqualitatis & duplæ quadratorum vel ſemiduplæ linearum proportionis, ratio corporum per diverſas diametrorum proportiones eſt iſta.

In Proportione diametrorum		Truncus æqualitatis
1.	2	ſuperat plus triente
2.	3	ſuperat nonadecimâ
3.	4	æqualis eſt Trunco alteri
4.	5	deficit parte 42da.
5.	6	deficit parte 26 ta.
6.	7	deficit parte 23 tia
7.	8	deficit parte 20 ma
8.	9	deficit parte 18 va
9.	10.	deficit parte 17 ma

Exinde continuè plus deficit, uſq; dum cylinder, conorum omnium principium, deficiat parte vndecima.

In proportionibus verò diametrorum maioribus: prævertitur truncus coniugationis duplæ, evaneſcendo.

Corollarium III.

Poſito, dolia eſſe ex puris truncis Conicis duplicatis, ſi eandem habuerint proportionem diametrorum, capacius plerumq; eſt, quod Auſtriacam figuram, proportionis ſc. ſemiduplæ diametri orbis lignei ad dimidiam tabularum longitudinem; quàm Rhenenſe, quod æqualem habet diametrum dimidiæ tabularum longitudini. Rariſſimè verò & forte nunquam

 fit,

ſit, ut æquentur capacitate; quia vix vnquam profunditates ventrium ad diametrum orbis lignei, attingunt proportionem ſeſquitertiam.

Hactenus de figura Dolij Auſtriaci, ſequitur,

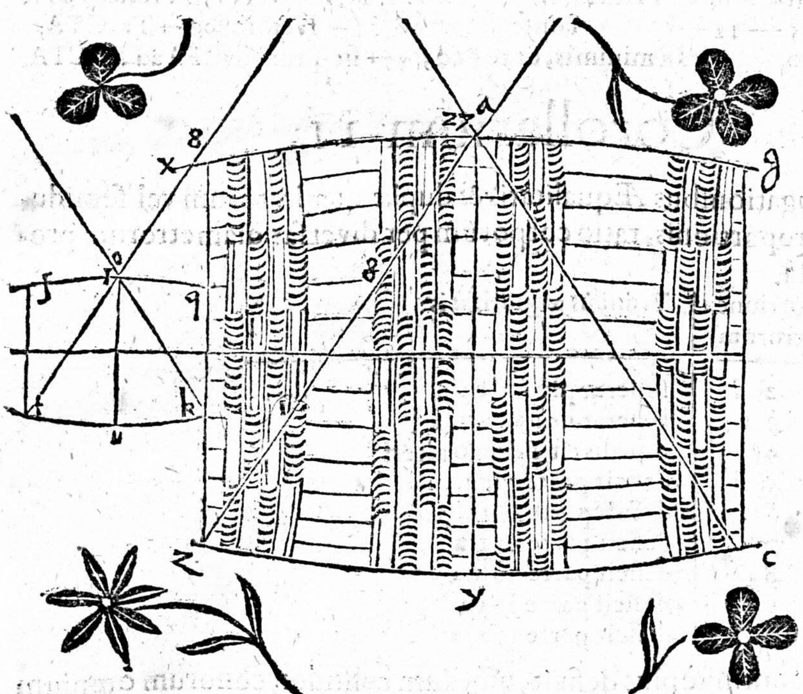
De virga cubicâ eiuſq; certitudine.

THEOREMA XXVI.

In dolijs, quæ ſunt inter ſe figuræ ſimilis: proportio capacitatum eſt tripla ad proportionem illarum longitudinum, quæ ſunt ab orificio ſummo, ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

Sint dolia diverſæ magnitudinis, ſpecie eadem SQKT, XGCZ, quorum orificia OA, diametri orbium ligneorum QK, ST & GC, XZ, eorumq; ima T, K & Z, C. longitudines OK, OT æquales, ſic & AC, AZ. Dico, capacitates doliorũ, eſſe in tripla proportione longitudinis OK, AC. Agantur enim per O, A, plana OV, AY, parallela orbibus ligneis, & ſint duo trunci Conici, SV & VQ, ſic XY & YG inter ſe ſimiles.

Schema XXII.



Quæ igitur de proportione dimidiorum doliorum ſunt vera, illa etiam de duplicatis erunt vera. Sint igitur propoſitæ figuræ OVKQ, AYCG, conici trunci, ſintq; latera figurarum OQ, VK, & AG, YC. Diametri Baſium minorum QK, GC, diametri baſium maiorum OV, AY; & OQKV, AGCY ſectiones quadrilateræ figurarum per ſuos axes, ſimiles inter ſe, earumq; diagonij OK, AC.

Ergò cum figuræ ſimiles, ſint ad ſeinvicem in tripla proportione analogorum laterum, erit proportionis AG lateris ad OQ latus, aut GC diametri, ad QK diametrum tripla, proportio GY corporis ad QV corpus. At in figuris planis trilateris AGC & OQK ſimilibus, ut GC ad analogum QK, vel ut AG ad analogum OQ, ſic etiam diagonios AC ad analogon diago-

diagonion OX. Quare etiam proportionis AC longitudinis ad OK longitudinem tripla eſt, proportio GY corporis ad QV corpus: & ſic etiam totius GZ dolij ad totum QT dolium.

Corollarium I, & ſtructura virgæ.

Manifeſtum hinc eſt, ſi virga menſoria dividatur in partes æquales tantas, ut prima & infima illarum ſit longitudo OK dolioli, quod capit Amphoram unam: ad ſingulas verò partium æqualium adjciantur numeri, qui ſunt inter ſe in triplicata proportione numerorum diviſionis æquabilis, nimirum ad finem primæ partis Vnitas, ad finem partium 2, numerus 8, ad 3, Numerus 27. ad 4. Numerus 64, ad 5 Numerus 125. & ſic conſequenter, & numeri reliqui, qui cadunt inter hos cubicos, ordinentur in ſpacia intermedia; ſicut pars ſecunda ſubdividatur in particulas 7 alias, non æquales, ſed proportionales, quibus apponi poſſint numeri 2. 3. 4. 5. 6. 7, medij inter 1. & 8. & ſic de cæteris: quod Virga in dolium rite immiſſà, numeri ad quos uſq; pertingit interior tabulæ ſuperficies OA, principio virgæ in K, C vel T, Z ſtante, ſint indices Amphorarum, quas capit dolium, proportionis nimirum eius, quam habet dolium, verbi cauſa, GZ ad dolium QT Amphoræ unius.

Corollarium II.

Eodem recidit res, quod quidam in triangulo AGC, pro latere AC metiuntur laterum AG, GC ſummam, pro virga circumgeſtantes limbum ex pergamena convolutum, amphorarum numeros eadem lege inſcriptum, cuius evoluti principium apud calcem C affigunt, longitudinem à C in G & porrò ad A extendunt, de nota eius quæ tetigerit punctum A, pronunciantes numerum amphorarum. Nam marginis apud G, procurrentem longitudinem, & circulorum ligneorum, viminibus revinctorum, tabularumq; & orbis lignei GC craſſitiem, quam amplectuntur circumductu limbi, præſupponunt per omnia dolia ſimilem.

Theorema XXVII.

Etiamſi binæ medietates dolij Auſtriaci non plane fuerint ſimiles, ſed orbium ligneorum alter paulo minor & anguſtior reliquo, dum modo longitudo in menſoria ſit eadem, inſenſibilis erit capacitatum in vtraque medietate differentia.

Dictum enim eſt in Corollario ad Theor. V. ſecundæ partis, dolium Auſtriacum verſari circa figurationem capaciſſimam, à qua figurationes omnes ad latus utrumque, hoc eſt, dolia tam longiora quàm breviora Auſtriaco, omnia ſint minus capacia, quàm Auſtriacum.

In ijs verò articulis, in quibus à minori ad maximum iterumq; ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, ſemper eſt aliquouſq; inſenſibilis illa differentia. Quod igitur verum eſt de dolijs integris, eandem habentibus diagonion: id etiam verum erit de binis unius dolij truncis, ut de AYX, AVG; ut etſi orbium alter, puta GC, fuerit minor reliquo XZ; dummodò AC, AZ æquales, capacitas tamen ſit utrinq; ad omnem ſenſibilitatem æqualis.

THEOREMA XXVIII.

At ſi longitudo virgæ per utrumq; dolij truncum non ſit æqualis, quod uſu venit: medium proportionale inter utramq; virgæ longitudinem, id eſt medius numerus inter duos ab una & ab altera medietate notatos, ſine errore pro indice capacitatis uſurpatur.

Nam minor longitudo inſcriptum habet capacitatis, quæ eſt ſui trunci, duplum; maior itidem ſui trunci duplum habet inſcriptum. Vtraq; ergo longitudo, junctis numeris, inſcriptum habent duplum capacitatis totius dolij. Medium igitur arithmeticum inter numeros utriusq; longitudinis, quod æquevalet medio proportionali inter lineas, arguit ſimplum totius dolij.

THEOREMA XXIX.

Curvatura Tabularum, ſeu buccoſitas inter orificium medium & orbem vtrumq; ligneum, in dolio Auſtriaco nihil derogat indicio Virgæ, in Oblongis doliis auget capacitatem à virga indicatam (per ſe quidem, cæteris paribus) in Curtis minuit.

Nam etſi, per XXIX partis primæ, dolium figura Citrij, Pruni, Olivæ, Fuſi Parabolici aut Hyperbolici, truncatorum, ſuperat capacitate dolium Cylindraceum, vel meri trunci duplicati figuram habens, his gradibus, quo hic ordine figurę ſunt recenſitę; illud tamen & per ſe eſt per parum uti apparet ex Th. XXII p. primæ; & quicquid eius ſenſibile eſt, jam in virgæ numeros ingeſtum eſt. Nam primum dolium, cuius capacitas pro vnius Amphoræ indicio, virgæ fuit inſcripta, ſimiliter ut cætera omnia, ſuam habuit buccoſitatem: arguit igitur Virga dolia omnia buccoſitatis ſimilis; quæ etſi non omnibus Auſtriacis eſt ſimilis, omnibus tamen eſt aliqua, eoq; minor error circa illam. At cum dolia fuerint longiora Auſtriacis, longior etiam in ijs flexus eſt tabularum ab orificio ad orbes, itaq; maioris capacitatis, etiamſi ſimilis vtrinq; ponatur flexura; quemadmodum etiam, ſi breviora fuerint Auſtriacis, flexus iſte eſt brevior. Atqui virga flexum longitudinis mediocris arguit, qualis eſt in dolio Auſtriaco; non aſſequitur igitur virga (cæteris paribus) longitudinem flexus in dolio oblongo; ſuperat in dolio brevi.

LII AVSTRIACI.

III. Pars.

VSVS TOTIVS LIBRI CIRCA DOLIA

I. Comparatio doliorum per virgam tranſuerſalem exploratorum.

Si dolium ſit proportionis Auſtriacæ, fidito uirgæ ſine reſpectu uel ventris inter orbem utrumq;, vel buccoſitatis ſive curvaturæ inter Orificium infuſorium & orbem utrumlibet ligneum; & tale dolium alijs omnibus præfer, excepto illo Rhenenſi, quod habet profunditatem ventris maiorem ſeſquitertia diametri orbis lignei, ſi tamen ullum habet. Ex cæteris igitur elige Oblonga cum multo ventre, qualia ſunt aliqua Rhenenſia: compenſat enim nonnihil gracilitatem & prolixitatem corporis, amplitudo ventris medij, & longitudo buccarum. In contemptis habeto dolia oblonga & cylindracea ſine ventre: poſt hæc Curta tibi cenſentor, cuiuſmodi aliqua veniunt ex Vngaria, parum aut nihil à cylindro puro puto differentia. At curta ventricoſa fugito modis omnibus; tres enim notas paupertatis habent, unam ex Th. V. magnitudinem proportionis Orbium ad dimidiam longitudinem Tabularum; ſecundam ex Th. XXII, ventris magnitudinem, tertiam ex Th. XXIX, buccarum brevitatem.

II. Conſideratio methodi menſurandi per virgam tranſverſalem cubicam.

Colligitur igitur ex his omnibus, ſimul conſideratis, nullam inter rationes menſurandi dolia, compendioſiorem ſimul atq; circumſpectiorem eſſe, uſu virgæ tranſverſalis cum diviſionibus cubicis, in dolijs Auſtriacis. Omnes enim cautelas menſorum in ſe continet. Primùm virga introrſum immiſſa eliminat craſſitiem tabularum, circulorum, qui vincula ſunt, viminumq; quibus circuli lignei ſtringuntur; Eliminat & exceſſum Marginum, quorum in crenis hærent orbes ſeu Baſes ligneæ. Hoc autem ratio alia menſurandi, unâ & eadem opera præſtare nulla poteſt; quæ non rationes menſuræ apud orificium A exigit, ubi intima ſuperficies tabularum in aperto eſt. Itaq; Menſores aliqui regulas hic nonnullas memoriæ mandant & ſequuntur, æſtimandi cæcam hanc tabularum Orbiumq; craſſitiem: quarum incertitudine circa inconſtantia exempla, omnis reliqua in menſurando ſcrupuloſitas eluditur. Secundò modus iſte cavet de inæqualitate baſium lignearum ſeu orbium, idq; citra tædioſam multiplicationem, citraq; repetitionem explorationis, vnâ & eadem opera, ut Th. XXVI huius dictum. At reliqui menſores in hoc multi ſunt, ut doliorum orbes inter ſe æquent, mediumq; eorum proportionale, demq; inter capacitates medium conicum inveniant; uſum virgæ plane-

 nime-

nimetræ conjungentes cum calculo moleſtiſſimo. Vide recentiſſimum, Ioannis Hartmanni Bayeri Medici Francofurtenſis librum de ſtereometria Inanium.

Tertiò, neq; diſſimilitudo Cadorum (quantula quidem in Auſtriaca dolia cadit) dum doliorum Opifices Regula ſua craſſè utuntur, aut dolia vetera præciſis marginibus ſarciunt multum derogat fidei huius menſurationis, ut dictum Corollario I. ad Th. V. & Th. XXII huius. Quartò, non negligitur hic, ſed ipſa methodo adſciſcitur amplitudo ventris, ſeu circulus maximus AY: ab illius enim ſummo A, inſtituitur menſuratio ad alterius imum C. Eius rei fundamentum pendet & Th XXII huius partis.

Quintò nec buccoſitas Trunci Conoidis hic quicquam nocet, per Theor. XXVIII. Eſt enim & per ſe exigua, & per omnes omnium doliorum medietates, fere ſimilis conniventia Tabularum, ad ſtructuræ rationes pertinens, quæ nec meram Conicam rectitudinem, nec inſignem aliquam ventricoſitatem, magis tamen illam, quam hanc requirit. At de hac buccoſitate pleriq; menſores valde ſunt ſolliciti: adeo ut Clavius, ut ſupra dictum, ad Ellipſes & Conoidea confugiat: neq; tamen quiſquam illorum adhuc genuinas doliorum figuras calculando ſecutus eſt, quas ego nunc primùm & cognoſcendas dedi demonſtrationibus ſpinoſiſſimis, & in numeros conieci operoſiſſimo calculo: ſed quod Auſtriaca noſtra dolia attinet, ingenioſa magis quàm utili vel neceſſaria machinatione, tantum ut ex comparatione calculi cum uſu virgæ Auſtriacæ, & commoditas huius dimenſionis tantò magis eluceſceret, & cæteri ſcrupuloſi computatores ſeſe reſpicerent, perpendentes, quàm hactenus fuſtra cerebrum fregerint computationibus laborioſiſſimis, culicem excolantes fractionum minutiſſimarum, ſed camelum errorum deglutientes: ſola hac altera re, pariter ipſis ignoratà fœlices, quod nullius ferè momenti ſunt plæræq; tam ſcrupuloſitates, quam errores circa illas.

Plurimum igitur ad privatorum ſecuritatem fraudeſq; eliminandas refert; ut lex illa dolij conſtruendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet deſcribere circulum orbium ligneorum, Magiſtratuum authoritate diligentiàq; conſervetur, pœniſq; & proſcriptione vaſorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur: aut certè, ut virgæ menſoriæ in enormibus illis dolijs dimetiendis, fides publico decreto abrogetur.

III. Quòd uſus virgæ tranſverſalis, inſcriptas habentis diviſiones Cubicas, ſit Auſtriæ proprius.

Patet hinc etiam, cur virgæ tranſverſalis uſus multò ſit Auſtriæ familiarior, quàm nationibus cæteris: Nimirum quia hanc dolij figuram receperunt, ad quam collimantes Vietores, minimum nocent capacitati, manuum aberratione. At penes nationes cæteras aliæ etiam doliorum figuræ in uſu ſunt; in quibus ventrium amplitudo tabularumq; longitudo mutata, ſtatim ſenſibile quid nocet; Quare etſi verum eſt, uſum virgæ tranſverſalis vniverſalem eſſe, in omnibus dolijs

inter

inter ſe ſimilibus, ſecundum Th XXVI huius partis: at nulla lex nulla inſtitutio ſufficit Opificibus, ut ſemper teneant eandem præciſè proportionem tabularum, multoq; minus profunditatis ventris, ad Orbes; ut in quâ conformandâ caſus plurimum valet, conſilium opificis minimum. Cùm itaq; figuræ inſtitutæ proprietas non ſubveniat aberrationi manuum, ut in Auſtria, ſic ut figuræ diſſimiles æquipolleant ſimilibus: diſſimilibus igitur figuris quotidie provenientibus doliorum, nec capacitatis ſimilis, non poteſt Virgæ tranſverſalis cubicæ ſolitariæ penes nationes cæteras tam latus eſſe uſus, ſine erroris aleâ.

IV. Ratio metiendi quodvis dolium circularium Orbium, ſine Virga diviſionis Cubicæ.

Sed cum generalem hoc libro ſpeculationem propoſuerim, praxis etiam ad omnes alias doliorum figuras extendenda videtur, cùm ut fructum aliquem Stereometriæ huius percipiant etiam nationes cæteræ: tum etiam ut Auſtriaci noſtri circa dolia peregrina (quæ identidem vel ſecundo vel adverſo Danubio invehuntur in Auſtriam, aut vino exotico plena, aut exportatura vinum Auſtriacum) tanto magis juventur: neve, uſu virgæ ſuæ, damnum vel inferant alijs, vel ipſi accipiant. Etenim Iuſtitiæ ſimulachrum pingitur cum bilance, menſurarum omnium exactarum ſymbolo; pertinetq; cura hæc circa menſurarum fidem, ad huius virtutis, ſuum cuiq; tribuentis, cultum; ut, quæ & ſalvas præſtat Reſpublicas, & ornat, ipſa quovis ſole pulchrior; ab eius amico & ſereno vultu, omnes nubeculæ errorum quàm longiſſimè dimoveantur, diſcutianturq;.

Virga igitur in parato ſit, diviſa in partes æquales minutiſſimas; cum illa in orificium dolij immiſſâ metire primo profunditatem ventris medij, deinde tranſverſas longitudines, ab infuſorij medio, ad imos calces utriuſq; orbis lignei; tertio virgam extractam ſiſte foris ad calces orbium ligneorum, acie etiam in crenas impreſſâ, ſi poteſt, metiens utriuſque orbis lignei diametrum in altitudinem porrectam ſeorſim; cui æquales ponuntur eſſe omnes aliæ diametri unius orbis lignei, propter ſtructuræ rationes, & quia hîc non de lagenis agimus. Si tamen aliqua notabilis diverſitas eſſet in diametris unius & eiuſdem orbis lignei, orta vel ex aberratione artificis, vel ex natura ligni, quæ cum venarum longitudinem præſtet invariabilem, latitudinem tamen tabularum habet auræ mutationibus obnoxiam: tunc etiam tranſverſas orbium ligneorum diametros metire.

Et quia fit interdùm, ut ipſa etiam ventris medij amplitudo non ordinetur in perfectum circulum: tentet igitur accuratus menſor, (cui ad omnem curioſitatem inſtrumenta modosq; poſſibiles ſuppeditare animus eſt) viam aliam diſcendæ areæ, qua dolium in medio ſectum eſſe intelligitur. Ea poſſit eſſe talis.

Limbo ex pergameno, aut alia materia flexili, non tamen, ut fila, ductili, circumdato medium ventrem dolij, metiariſq;, quot partes virgæ contineat limbus talis. Poſito igitur, quod dolium in medio foris exactè

ſit

ſit circulare, ex numero partium harum facile per Th. I. diſces, quanta diameter debeat eſſe huius circuli: Vt ſi partes in ambitu inveniſſes 6283 cum una quinta, diameter deberet habere partes 2000. Atqui jam exploratam habes diametrum interiorem ſeu profunditatem ventris: aufer igitur à computata craſſitiem ligni, quam potes metiri in infuſorio, & pro altera tabula in dolij imo aufer tantundem: quod ſi diameter profunditatis invenituræqualis huic computatæ, ex ambitu exteriore, & diminutæ: dolij venter exactè circularis credi poteſt; quia ſi deflectit à circulo, cauſa nulla eſt, cur potius obliquæ diametri (quod tamen etiam fieri poteſt) quam erecta & transverſa ſint inæquales. Sed omnem certitudinem huius rei (ſi fortè ſit materia metienda precißior auro, quantitatis eiuſdem) diſces lignis parallelis, intervallo, quantum requirit dolium, firmiter inter ſe coaſſatis, quibus omnes circumcirca diametros, ſi trabes binæ dolium ſuſtineant, explorare poteris. Quod ſi igitur deprehendantur inæquales diametri, erecta & tranſverſa, vel alia quæcunq; tunc figura eſt Ellipſis: quare per Epiſ. ad Th. I. p. primæ; diameter computata, medium erit arithmeticum inter erectam & tranſverſam. Itaq; quantò computata & diminuta longior eſt diametro profunditatis, tantò viciſſim hæc erit longior diametro tranſverſâ.

Ex cognita igitur diametro vel diametris cuiusq; circuli vel Ellipſis, ſic elicies aream, tam orbis lignei, quàm ſectionis imaginariæ per medium ventrem, per Th. II, & Epilagma III, partis primæ. Multiplica diametrum erectam in tranſverſam, ſive fuerint æquales, ſive inæquales: eritq; factus ad ſummam parvulorum quadratorum, quæ ſunt unam virgæ diviſionum æqualium longa & lata, contentorum in area talis orbis lignei, ſicut 14 ad 11 ferè. Accuratius, (quod dicto Theoremate omiſſum hinc ſupple) ut numerus poſt quaternarium ordinatas habens Cyphras ſedecim, ad dimidium numeri, quo effertur circuli circumferentia Th. I. Nam ut obiter hoc dicam à nemine adhuc demonſtratum, neſcio an à quoquam obſervatum: In omnibus figuris regularibus, circulo circumſcriptis, & ſic etiam in ipſo circulo, quaſi in figura infinitangula, uſu venit, ut ipſarum perimetri, quando diameter habere ponitur partes 2, numero contineantur, qui duplus eſt numeri, quo continetur area figuræ.

Proxima tibi cognitio neceſſaria, eſt longitudinis dolij, quam non ita facile foris, vel intus metiri datur virgulà, quia curvantur tabulæ, procurruntq; ultra crenas orbesq; ligneos, quorum etiam craſſities ignoratur. Veram igitur longitudinem ſic diſces; quadra longitudinem tranſverſalem, ab hoc quadrato aufer factum ex diametro orbis lignei & diametro ventris (ſumpto medio arithmetico ſi non fuerint omnes vnius figuræ diametri æquales) reſiduum ſerva, deinde orbis lignei diametrum aufer à diametro ventris, reſiduum quadra, quadrati partem quartam aufer à reſiduo prius aſſervato: radix eius quod remanet, eſt longitudo medietatis illius, cuius orbem ligneum adhibuiſti; technicè dicitur altitudo trunci. Quod ſi doliũ eſt regulare, duplum erit hujus, longitudo totius dolij; ſed tutius ages, repetendo proceſſum eundem cum altera longitudine tranſverſali, alteroq; orbe ligneo: quo patefiet alterius medietatis longitudo, hoc eſt alterius Trunci altitudo.

Exem-

Exemplum. Sit inventa in Sch. XXII, tranſverſalis AZ longitudo partium æqualium virgæ 24 ſemis & paulò plus: ut ſit eius quadratum 602 ſ. Sint etiam inventæ diametri AY 22, XZ 19, partium earundem. Hæ in ſe mutuò multiplicatæ, faciunt 418, quem aufer à 602 ſ. reſtat 184 ſ. Differunt diametri per 3, cuius quadratum eſt 9, & hinc pars quarta, 2 cum quartâ: quam aufer ab 184 ſ. reſtat 182 cùm quartâ, cuius radix 13 ſ. dimidij dolij longitudo interna, ut tota GX ſit 27 longa. Et cum quadratum de 22 ſit 484, de 19, ſit 361: Vt igitur 40000 ad 31416, ſic 484 & 361 ad 380 + & 283 ſ. areas circulorum AY, & XZ.

Inventis areis circulorum, & longitudine medietatis utriuſq;, trivium occurrit; aut enim pro Truncis Conicis habentur, binæ dolij cuiuſq; medietates, aut pro Truncis Citrij, aut pro figuris intermedijs, pro Pruno, Oliva, Fuſo Parabolico, vel Hyperbolico, truncatis: hoc eſt, curvaturæ tabularum tribuitur vel mera rectitudo ab infuſorio ad marginem, vel merus circulus inter utrumq; marginem & infuſorium, vel figura ex utroq; mixta.

Illa viâ ſemper paulò minus iuſto colliges, iſtâ promiſcuè vel plus iuſto, vel iuſtum attingitur; hac ſemper iuſtum attingeretur, ſi tam facile per hanc incederetur, quàm per illas.

I. Prima via dividitur Truncus quilibet in cylindrum regularem, quaſi ſtantem ſuper baſi, orbe ligneo, & in circumiectum illi ſegmentum limbi Cylindracei Conicum, quod Tunicam apellavimus. Ergò Cylindri corpus, per Th. III partis primæ, computatur, ducta altitudine dimidii dolii, in baſin orbis lignei ſupra inventam: nam numerus inde factus, ſummam continebit parvulorum Cubiſcorum, qui ſunt in propoſito cylindro, quorum quilibet unam virgæ particulam diviſionis æqualis, longus latus & profundus ſit. Trunci verò, ſeu dimidii dolii proportio ad Cylindrum ſuper baſi, orbe ligneo, habetur per Corollarium ad Th. XVII partis primæ, ducta diametro orbis lignei, & in ſe, & in diametrum ſeu profunditatem ventris; ducta etiam differentia harum diametrorum in ſui partem tertiam: & numero Cubiſcorum in cylindro prius invento, multiplicato in ſummam factorum poſteriorum, factoq; diviſo per quadratum diametri orbis lignei: prodit enim ſumma Cubiſcorum in dolio. Eodem verò modo agendum etiam cum altera dolii medietate, ſi fuerit diſſimilis aut inæqualis.

Quot autem huiuſmodi Cubiſcorum faciant unam menſuram, non aliter diſces, quàm ſi ex lamina ferrea vaſculum oblongum, Cylindraceum exactè, & æqualiter rotundum ſtruxeris, cum fundo optimè complanato, deinde infuſo liquore unius menſuræ in vas ſiccum, virga tua menſus fueris altitudinem quam ſignaverat liquor ante immiſſionem virgæ in vaſculum; menſus etiam fueris amplitudinem circuli in ſummo, debet enim æqualis eſſe imo. Nam ex amplitudine diſces aream circuli, modo ſupradicto, ex hac & altitudine, corpus ſeu numerum Cubiſcorum in vna menſura: quo numero ſi diviſeris numerum Cubiſcorum cuiuscunq; ſolidi, habebis in quotiente numerum talium menſurarum, quas capit locus ſolidus, ſeu dolij ſeu Cupæ. Atq; hæc eſt prima methodus, qua dixi colligi minus juſto. Exemplum habes poſt Th. XXII partis primæ.

Sed continuabimus hic etiam prius inceptum. Duc igitur 13 ſemis in 283 ſ. baſin minorem, orbis ſcilicet lignei XZ, fiet Cylinder 3685 ſ. In hac verò proportione diametrorũ, eſt cylinder ad Truncum, ut 361 ad 421. Ergò ſi 361 fit 3685 ſ. quid 421? ſequitur 4298, tot cubiſcos valet dimidium dolium: totum ergo 9596. Quod ſi 30 huiuſmodi cubiſcorum implerent unam menſuram, diviſo 9596 per 30, prodiret 320 fere, tot menſuras caperet dolium totum.

II. Altera methodus, qua dolium conſideratur, ut Citrium utrinq; truncatum, quæq; frequentur juſtum pronunciat, ſed æquè frequenter plus juſto; jam ſupra in Exemplo ad Th. XXII & XXV p. primæ prolixè & ſcrupuloſiſſimè fuit tradita: nec alia repetitione eſt opus, niſi ut moneam, dolium illic apellari Citrium Truncatum, dolij ventrem illic eſſe circulum maximum per medium corpus Citrij; Orbes verò ligneos illic appellari circulos Truncantes. Deinde & hoc eſt addendum, ſi orbes lignei non fuerint æquales, operandum eſſe bis, ſemel per minorem orbem, ac ſi uterq; tantus eſſet, iterum per maiorem, ac ſi uterq; maior; quodq; poſterior calculus differens prodet à priori, eius parte dimidia hinc detracta vel inde adjectà, juſtum (ut in perfecta Citrij figurà) conſtitutum iri.

III. Quod ſi tibi ſcrupuloſitates iſtæ nondum ſufficiunt, eo quod curvatura tabularum non ſemper habeat figuram Circularem exactè, & ſi, ut eſt Geometricorum ingeniorum natura, non ex aliena & conficta, ſed ex genuina & propria cuiuſq; dolij figura lubet argumentari & calculare: age, prius inquirito, qualis omninò figura ſit huius curvitatis Tabularum?

Quaſdam igitur viſu ſimplici dignoſces, quibuſdam indagandis opus tibi erit inſtrumento & dexteritate manuum, circaq; hoc exercitium, ſubtilitate curioſiſſimà: quaſdam deniq; & pleraſq; quidem, nullo ingenio diſcernes à perfecto circulo, propter rudem tabularum coaſſationem, impedimenta circulorum ligneorum & viminum, inæqualem tabularum craſſitiem, & ipſarum figurarum affinitatem inter ſe.

Quod ſi in oculos incurrat curvaturæ tabularum in medio ventre diſſimilitudo à curvatura verſus extremos margines, dolium erit Truncus Fuſi Hyperbolici, & quo anguſtius hæc curvatura ventrem circumſteterit, hoc maior Hyperboles pars erit, hoc propius etiam capacitas dolij ad capacitatem Trunci Conici accedet.

Reliqua hoc inſtrumento expedies. Cape regulam ex ferro vel orichalco, quadratam, benè politam, longitudine dolij, non flexilem ſuo pondere; in illa ſint ſtili ferrei graciles & acuti ut clavi, truſatiles per longitudinem regulæ, ſic ut in quacunq; eius parte hæreant firmi non vacillantes; poſſint autem Cochleis à regula extrudi reduciq; ad illam: ſint numero, cùm minimum, quinq; melius ſi ſeptem; quorum medium ſufficit fixum adhærere Regulæ mediæ, longitudine, quæ ſuperet craſſitiem omnis circuli lignei in dolijs. Statuto igitur ſtilo fixo in vna commiſſurarum, qua duæ tabulæ coeunt in medio dolij ventre, reliquos ſtilos truſatiles, binos & binos, vel ſi adſunt, ternos, ordina verſus dolij margines, intervallo illis indulto modico & utrinq; æquali; cochleiſq; extrude, ut omnes tangant commiſſuram eandem, extimi æqualiter à medio remoti, in marginibus extremis; cæteri in punctis vicinis, inſinuantes ſe inter binos circulos ligneos, quâ datur eorum tantulum intervallum. Ita comprehenſa ſtilorum extremitatibus quina vel ſeptena figuræ puncta, cum Regula transfer in planiciem tabulæ bene complanatæ, factis in ea punctis totidem; ut ſi ſint in Schemate XVIII. puncta extrema F, G, medium C, interjecta Q, S, & reſpondentia in parte alterà. Et ne quis ſcrupulus ſuperſit, metire etiam craſſitiem tabularum, tam in orificio infuſorio, quàm in marginibus; ea quanta fuerit, tanto intervallo verſus interiora, & centrum veluti curvaturæ, facito puncta alia, deletis prioribus,

Schema XVIII.

ribus,

ribus, ut interiorem curvitatem dolij, quinis vel ſeptenis punctis in plano habeas propoſitam.

Primùm igitur connecte puncta F, G, per rectam FG; deinde cùm CG, CF ex proceſſus deſcriptione ſint æquales; ex C perpendicularem duc in FG, quæ ſit CO, continueturq; extrorſum aliquouſq;. Tertiò per bina puncta extima, ut F, S, & reſpondentia ex altero latere, duc rectas, & continua illas, uſq; in perpendicularem CO continuatam. Quod ſi reliqua puncta non fuerint intra complexum harum linearum inventa omnia, vel ſaltem exteriora in hac ipſa linea; aut ſi duæ hæ lineæ concurrerint alibi, quàm in ipſa perpendiculari CO continuatà, ut in Y; tunc operam luſiſti, certumq; habes, vel dolij figuram, vel inſtrumentum, vel manus tuas, ad hanc ſubtilitatem eſſe ineptas. Poſſumus autem his duabus lineis, etſi, accuratè loquendo, ſecant Hyperbolen, in punctis ſingulæ binis, uti loco contingentium; utiq; in dolijs, quæ mihi videre contigit. Quare per Th. XXVII partis primæ, diligenter metire, quæ ſit proportio CO (dimidiæ differentiæ diametrorum, ventris & orbis lignei) ad CY. Secto enim angulo OGY in æqualia, ſi ſecans tranſiverit per punctum C, figura ex circulo erit, pertinebitq; ad methodum ſecundam propriè. Sed quod maximè facit ad comparationem cum cæteris, quæritur tunc ſegmentũ Globi FGC, deinde per Th. XXV p. primæ, fit ut GO ad OC, ſic numerus ſegmenti globi, ad numerum, qui exprimet dimidium corpus Citrij parvi: cuius proportio ad Zonam circa cylindrum HFGE docetur in Exemplo ad Th. XXII.

Si verò fuerint æquales NG, CY, figura eſt ex Parabola: quare per Th. XIII. Epiſ. II. quæritur Parabolicum Conoides ex cono æquealto: Nam area circuli cuius diameter FG, ducta in partem tertiam OC creat numerum corporis Coni, at Conoides eſt ſeſquialterum Coni: ergo corpus Conoidis habetur, ducta area FG in ſemiſſem CO. Tunc ex Conoide quæritur Fuſum parvum in Conoide, per Analogiam Th. XXVII partis primæ: ſcilicet ut GO ad YO, duplum ipſius CO; ſic Conoides inventum ad Fuſi eius corpus dimidium. Invento corpore Fuſi parvi, proceſſus reliquus idem eſt, qui cum Trunco Citrij: Zona enim circa fuſum, habet partes duas, altera eſt Fuſum parvum, jam inventum, reliqua & maior quidem pars creatur, ducta circumferentia circuli orbis lignei in figuram planam FGC, quæ parabola dicitur; cuius area habetur ex Epiſ. II ad Th. II. ductâ enim parte dimidia, id eſt tribus ſextis de CO, in rectam FG creatur area trianguli FCG, cuius ſeſquitertia cum ſit area Paraboles, creatur igitur, ductis quatuor ſextis, hoc eſt beſſe ipſius CO in rectam FG.

Quòd ſi fuerit CO maior quàm CY, figura erit ex Hyperbola, proximèq; accedet dolium, ad conum duplicatum: idq; tanto magis, quanto maior fuerit CO quam CY. Eritq; Conoidis Hyperbolici proportio ad corpus dimidij Fuſi inſcripti, paulò minor, quàm GO ad OY, maior tamen quam GO ad OV, ſi V centrum ſit figuræ. Hoc ſolum lucramur ex hac ſcrupuloſitate circa Hyperbolam: de cætero, Cùm nondum determinata ſit recta inter OY & OV, quadrans ad proportionem convenientem; non etiam animum adieci hactenus ad quadraturam Hyperboles, cuius cognitione inſuper opus eſſet, ad Zonam Fuſi Hyperbolici ex arte computandam. Opitulamini Apollonij.

Rurſum ſi CO minor quidem fuerit, quàm CY, maior tamen ad CY quam OG ad GY (quod quis qua diligentia diſcernet?) figura erit ex Ellipſi recta; cuius ſegmenta ad circuli ſegmenta, facta per rectam axi parallelam, ſemper habent proportionem eam, quam brevior eius diameter ad longiorem, per ea quæ Archimedes adhibet ad demonſtrandum Epiſagma III ad Th. II, perq; dicta à me in commentarijs de motu Martis, quod ad dictum Th. II primæ partis erat etiam ſuperinducendum. At cum linea proportionis ſegmenti ſphæroidis recti ad Prunum Ellipticum, inter C. Y, nondum ſit determinata, ut & prius in hyperbola, nullum hic ingenioſis, & omninò Apollonijs, exitum monſtrare poſſum, quàm quem ipſi ſibi ſollertiſſimi ingenij acie, ſuperius Th. XXVI provocati, exciderint & patefecerint: mediocribus ingenijs nullus hic theſaurus utilitatis aut compendij latet abſconditus. Idem deniq; teneto, cùm CO minor ad CY fuerit, quam OG ad GY: figura enim erit ex Ellipſi tranſverſa, & Sphæroidis ſegmenti proportio ad Olivam maior erit, quàm GO ad OC, ſed genuina linea nondum eſt nota: quod tanto minoris momenti impedimentum cenſeri debet, quanto minus veriſimile eſt, dolia Sphæroidis, quàm Hyperboles aut circuli figuram imitari.

V. Qua ratione quis artificioſè metiri poſsit, proportionem partis vacuatæ ad reſiduum liquoris, ſtrato dolio, erectisq; ad perpendiculum diametris Ventris & Orbium ligneorum.

Deſiderata hactenus, quantum ego ſcio, doctrinæ huius pars: utilis tamen patribus familias ad arguenda & cavenda furta: ſi tamen Bachus à Thetidis ditione ſuas opes procul collocaverit, eiq; ſuis finibus interdixerit: ſolet enim hæc dea ſic tegere ſui vernę maleficia, ut cùm partem ille ſubduxerit, iſta refundendo corrumpat reliquum. Coigneti aliorumq; modus, qua certus eſt, anguſti eſt uſus: ut verò ad omnis generis dolia extenditur, ſine errore & abſurdis, quod facile fatebuntur authores, exerceri non poteſt. Incipiamus tamen ab illo: Nimirum ſi ſit figura cylindri, aut inſenſibiliter ab ea deflectat, ſuperficies plana liquoris, ſecat orbes ligneos, ventriſq; amplitudinem, in bina ſegmenta circuli, quare, per Th. XVII, p. primæ, ſegmenta duo totius Cylindracei dolij, vacuum & plenum, ſunt in proportione ſegmentorum planorum in baſibus.

Sed quia dolium eſt compoſitum ex duobus veluti Truncis Conicis, quorum reputatur altitudo technica, quantum eſt longitudinis inter circulum ventris & orbem ligneum: Truncus verò quilibet conſtat ex cylindro medio, ſuper baſi Trunci minori, & circumjecta Tunica (ſic enim appello in dolio dimidiam ventris protuberantiam ſupra molem intimi cylindri: ſi totum dolium eiuſq; genuinam figuram conſideres, tota ventris protubernantia, conſtans ex duabus talibus veluti tunicis adverſis, in ſuperioribus mihi dicta fuit Zona) animadverte igitur, quod Tunicæ vel Zonæ huius margo primùm ſubſidit, priuſquàm ab intimo cylindro, qui eſt inter orbes ligneos, quid defiat: poſteaquàm cylinder incipit minui, ſemper unâ mi-

minuitur etiam Tunica: ad extremum toto cylindro exhauſto, reſtat in fæcibus adhuc margo Tunicæ vel Zonæ. Quis in hac irregularitate ſperet ab arte ſubſidium?

Atqui non plus unico Theoremate nobis opus fuerit, ut de vacuatione Dolij, cum figura Trunci conici duplicati, demonſtrativam planè præſcribamus Methodum. Dictum eſt ſupra Th. XVI partis primæ, nondum eſſe factam à Geometris diſquiſitionem de ſoliditate ſegmentorum quorundam Coni: quæ inter, ſunt etiam iſta ſegmenta Truncorum Conicorum, ſeu dolij, quæ determinantur per planam ſuperficiem liquoris defluentis, parallelam axi Truncorum conicorum, rectam ad communem baſem Truncorum, ſeu circulum medium Ventris.

De his itaq; ſegmentis Coni, lubet aliqua diſſerere etiam hoc loco, ad provocandos Geometras; ut qui hactenus non ſatagendum putarunt de his ſegmentis, uſu, quod ſupra dicebam, non exigente; ij jam tandem, poſtquàm manifeſtum vident uſum eorum, e ſomno evigilent, demonſtrationemq; ſoliditatis eorum quærant. Primùm itaq; conſideravi, ſi fortè tale coni ſegmentum, quod fit plano ad axem parallelo, eoq; Hyperbolico, proportionem ad Conum totum habeat, compoſitam ex proportione ſegmenti ſuæ baſis ad baſim Coni, & ex proportione ſuæ altitudinis ad Coni altitudinem. Hæc opinio vero quidem eſt proxima, ſed tamen falſa. Nam portio hæc eſt ſegmenti Coni ſcaleni humilioris, ſcilicet per verticem ſecti, ad conum propoſitum altiorem: atqui tale ſegmentum Coni ſcaleni per verticem ſecti, eſt minus ſegmento Coni altioris, ſuper eadem baſi ſtanti; exit enim in mucronem; cùm hoc exeat ſurſum in quandam aciem latam Hyperbolicam: illud continetur ſuperficie Coni minoris & plano triangulari; hoc portione ſuperficiei Coni maioris, & plano Hyperbolico.

Secundò conſideravi, num ſegmentum Coni propoſitum, ſit æquale ſegmento conſimili cylindrici ſegmenti, habenti eandem baſin & altitudinem: de quibus ſegmentis ſecundis egimus Th. XVII. p. prioris; quorſum ſpectat etiam Th. XXII ex parte: & an non tam Cylindraceum quam Conicum ſegmentum, ſtantia ſuper eodem ſegmento circuli, & terminata ſegmentis planis, illud Elliptico, hoc Hyperbolico, quodlibet æquet partem [illegible] ſegmenti cylindrici recti, per planum axi parallelum facti, ſuper baſi eâdem. Sed nec hoc ipſiſſima veritate nititur, utcunq; prope accedat. Nam ſi verum hoc eſſet de uno, non poſſet eſſe falſum de ſemicylindro, quem determinat planum per axem, tranſiens etiam per inſcripti Coni axem & verticem. Nam diviſo hoc ſemicylindro in partes 33, ſemiconus eodem plano per axem determinatus, eſt talium partium I, per Th. IV, pa. Iæ: at ſegmentum cylindrici ſegmenti eſt talium partiũ 34, per Th. XVII. Quod igitur intereſt corpuſculum geminatum, terminatum intus Conica ſuperficie, foris planâ & portiunculis Cylindraceæ, eſt partium tantùm 8. Etſi verò hic conus dimidius eſt præciſè triens ſemicylindri, tamen hoc in alijs ſegmentis non obtinet, eo ipſo, quod tunc Conus non amplius per Verticem ſecatur; ſegmentum igitur Coni propoſitum maius eſt triente ſegmenti cylindrici recti æquealti: & videntur iſta ſucceſſivè magis magiſq; fieri æqualia, viciſſimq; corpuſcula interpoſita magis magiſq; attenuari, quo minus fit ſegmentum ipſum rectum Cylindricum, cuius iſta ſunt partes.

Tertiò igitur videtur inquirenda quadratura Hyperboles, quæ ſegmentum coni determinat, qua inventa facile eſt, cuilibet Hyperbolæ triangulum ſuper eadem baſi aſſignare, cuius area ſit æqualis areæ Hyperboles. Nam proportio ſegmentorum Coni, ad Conum totum, videtur eſſe compoſita ex proportione baſeon planarum, & proportione altitudinum triangulorum iſtorum, hyperbolas æquantium. Interim dum hanc prædam venatu referant Apollonij; nos fidem reliqui Theorematis etiam non demonſtrati, ſecuti, id eligemus quod ad veritatem aſpirat; & ſegmenta circulorum quæ ſunt baſes Conicorum propoſitorum, ducemus non in altitudines eorum, qua ratio minora juſto conſtitueremus; ſed in lineas longiores, ſcilicet in continuatas has altitudines, uſq; ad arcum circuli, per vertices conorum continuatorum, perq; orificium dolij traducti, ut ſi in Sch. XXI. circulus maximus traduceretur per BC, & oppoſitum verticem ultra D, ut ſit CL ſagitta, & LB ſinus arcus, determinantis noſtras lineas: cui circulo expedit peculiare nomen eſſe; dicatur Metator. Manifeſtum enim eſt, talem arcum non tangere dolium in G, orbe ligneo, ac proinde altitudinem OG technicam ſegmenti conici COG, continuatam in hunc arcum, fore longiorem, veluti ſi OZ eſſet. Segmentum igitur CA ventris, cuius altitudo CO, ducemus in trientem linearum OZ, pro ſoliditate ſegmenti Conici. Si quis metuit, ne OZ nimis ſit longa, is cogitet ſegmenta nobis hic propoſita non eſſe merè conica, ſed his maiora ex Citrio & Fuſo.

Schema XXI.

Naſcetur igitur proceſſus iſte. Ante omnia notam eſſe oportet ex ſuperioribus præceptis, amplitudinem ventris CA, & diametrum orbis lignei GE, cum dimidia differentia CO, & per tranſverſalem CE, ipſam etiam altitudinem technicam Trunci OG. Eſt autem CO ad OG, ut CL ad LB altitudinem Coni continuati. Igitur ſcientur areæ circulorum CA & GE, ex ſuperioribus, in menſura una, quæ areæ ducendæ ſunt in ſuarum altitudinum LB & KB partes tertias, & auferendus, conus GEB, deficiens à Cono CAB continuato, ut reſtet truncus CA EG, in numeris aptis præſenti negocio. Iam pro inveniendis lineis OZ opus eſt diametro Metatoris: quadratum igitur ipſius LB, divide per CL, & prodibit in quotiente, reſiduum diametri. Adde igitur CL ad hoc reſiduum, compoſitus erit diameter Metatoris. Igitur ſi propoſita ſit altitudo vacui CO, per eam inquirenda ſunt, ſegmentum circuli ventris, per præcepta ſuperiora, & linea ex O perpendiculariter per ſuperficiem liquoris defluentis exiens in metatorem. Aufer igitur CO à diametro Metatoris, ablatam multiplica in reſiduum, facti radix eſt linea quæſita; in cuius partem tertiam, multiplicanda eſt area ſegmenti circuli Ventris, pro ſoliditate ſegmenti Conici. Quod ſi altitudo vacui CO non ſuperat dimidiam differentiam diametrorum CA, GE, ſufficit hoc laboris. At ſi ſuperat, labor geminatur. Segmentũ enim Coni tunc excurrit ultra Truncum CGE, in Conum GBE deficientem: quare pars eius deficiens inquirenda, & à ſegmento toto auferenda erit. Aufer igitur dimidiam differentiam diametrorũ ab altitudine liquoris; cum reſiduo tanquam ſinu verſo, quæratur area ſegmenti orbis lignei, quod extat ſupra ſuperficiem liquoris; nanciſcatur autem eandem dimenſionem cum areà ſegmenti plani ventris. Tunc quæ eſt proportio altitudinis liquoris ad exceſſum ſuum ſupra dimidiam diametrorum differentiam; in eadem proportione admetire

tire huic minori ſegmento orbis lignei, portionem de linea OZ, cuius tertiam partem duc in ſegmentum lignei orbis, pro ſoliditate partis de Conico ſegmento deficientis: qua ablata à toto ſegmento Conico, relinquitur ſegmentum Trunci inanitum.

Deniq; ſi tibi cognitus eſt numerus menſurarum, quas capit dolium totum, eum multiplica in ſegmentum Trunci, vel una vel duabus operationibus inventum: factum divide per ſoliditatem Trunci totius, prodibit in quotiente numerus menſurarum, quæ defluxerunt.

Cùm autem & hîc & ſupra ſæpius uſu veniat, ut quærenda ſint ſegmenta circulorum, per ſinus verſos dimidiorum arcuum, quæ res moleſtias magnas creat; ut hac te moleſtia ex parte liberarem, tabellam hic confeci, quæ ſingulis centeſimis partibus ſinus verſi ſeu ſagittæ, à ſummo verſus centrum, aſſignat quantitatem areæ ſegmenti in ea proportione, ut circuli illius totius area valet partes 15710: nec enim aptior numerus mihi exivit, utenti facili & expedita via computationis; nec nunc vacat, hunc numerum cum rotundo aliquo permutare.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0.	0	294	818	1478	2237	3072	3964	4900	5868	6856	7855
1.	10	339	879	1550	2318	3159	4056	4996	5966	6956	
2.	27	386	941	1623	2399	3246	4148	5092	6065	7056	
3.	49	434	1004	1697	2481	3334	4241	5188	6163	7155	
4.	76	484	1069	1772	2563	3423	4334	5284	6262	7255	
5.	105	536	1134	1847	2646	3512	4428	5381	6360	7355	
6.	138	589	1201	1923	2730	3601	4521	5478	6459	7455	
7.	173	644	1269	2001	2815	3691	4616	5575	6558	7555	
8.	211	701	1337	2079	2900	3782	4710	5673	6658	7655	
9.	252	759	1407	2158	2985	3873	4805	5770	6757	7755	

Vſus tabellæ: ſegmenti ſagittam ſeu ſinum verſum, ſeu quod eſt loco eius (vt in Ventre, altitudinem vacui, in orbe ligneo, altitudinem extantis partis ſupra liquorem) duabus Cyphris auctum, divide per ſemidiametrum circuli, cuius eſt ſegmentum: quod prodit, eius denarios quære in fronte, digitos in margine, & area communis exhibebit aream ſegmenti, qualium area totius illius circuli valet 15710; quæ ſi valeret minus aut plus, reductione aliqua opus eſſet ad communem dimenſionem.

Exemplum huius proceſſus. Sit venter dolij CA altus 22, diameter orbis lignei GE 19, dimidia ergo differentia CO ſeſqui: Et OG 13 ſ. Vt autem CO ſeſqui ad OG 13 ſ. vel ut 3 ad 27; 1 ad 9. ſic CL 11 ad LB 99, ergo KB eſt 85 ſ. Ponemus autem, aream circuli CA valere numerum Tabellæ, ſc. 15710. Erit ergo ut quadratum 484 de CA 22, ad quadratum 361 de GE 19, ſic area circuli CA 15710, ad aream circuli GE 11718. Duc 15710 in trientem de 99, prodit 518430, pro corpore CBA: duc 11718 in trientem de 85 ſ. prodit 333963, pro corpore GBE, quod aufer à CBA, reſtat 184467, pro Trunco CGEA. Iam pro diametro metatoris: ipſius LB 99, quadratum 9801, divide per CL 11, quotiens erit 891; cui adde 11, erit Metatoris diameter 902.

Sit primò altitudo vacui minor quam CO, ſc. 1. Vt igitur poſſis excerpere eius ſegmentum ex tabella, dic, CL 11 fit 100, quid 1, prodit 9 cum undecimâ: hæc immiſſa in tabellam, refert ſegmentum Ventris 256 ferè. Aufer deinde 1 à 902 diametro metatoris, reſtat 901, quod duc in 1. fit 901. cuius radix 30 +. Duc igitur eius ter-

tertiam 10 in 256. prodit ſoliditas ſegmenti 2560. Quia ergo altitudo vacui minor eſt, quàm CO: valet tota hæc ſoliditas. Et ut 184467 ad numerum menſurarum dolij, ſic 2560 ad numerum menſurarum quæ defluxerunt. Sed nota, ſi operareris per ſimplicem ſegmenti altitudinem, quæ eſſet 11, tunc non multo plus tertia parte huius colligeres, quod eſt certò minus juſto.

Sit ſecundò altitudo vacui, maior quam CO, ſc. 6. Vt autem 11. ad 100, ſic 6 ad 54, cum 6 undecimis. Ergo in tabella quæſiti, 50 in fronte, & 4 cum appendice in margine, exhibent ſegmentum 3468. Aufer deinde 6 à 902 reſtat 896, quod duc in 6, fit 5376, cuius radix 74, minus ſexta parte: duc huius tertiam partem in ſegmentum, prodit ſoliditas ſegmenti Conici 85351, ſed ultra truncum conicum excurrentis, quia 6 ſuperat CO. Ergo aufer CO ſeſqui à 6, reſtant 4ſ. cum hoc quærendum ſegmentum orbis lignei. Si ſemidiameter eius 9ſ. fit 100, tunc 4ſ. fit 47 cum triente ferè: cum quo ex tabella eruitur ſegmentum 2843, qualium area orbis lignei, quæ minor eſt areâ ventris, habet 15710. Duc igitur 2843 in 361, quadratum de 19; factum divide per 484, quadratum de 22, prodit 2120ſ. Et quia ſegmento toti, cuius erat numerus 6, tribuebatur 74, eius parti, cuius eſt numerus 4ſ. tribuendũ erit pro altitudine 55ſ. cuius tertiam duc in 2120ſ. fiet 3922ſ. ſoliditas apicis, de ſegmento excurrentis in conum deficientem. Aufer hanc à ſegmento toto, reſtat ſegmentum Trunci conici 81429ſ. vacuum. Rurſum igitur, ut 184467 ad numerum menſurarum totius dolij, ſic 81429, ad numerum exhauſtarum menſurarum. Si per ſimplicem altitudinem ſegmenti operareris, ea fuiſſet non 74 ſed 66, ſegmenti ſoliditas 76312, deficientis verò apicis 3640, ſoliditas ergò ſegmenti de Trunco 72672, certò minor juſto. Nos igitur quod hic maius invenimus, pro vero amplectimur.

At enim excipient Apollonij, ne ſic quidem, hac ſoliditate ſegmentorum conicorum conceſſâ, ſatisfactum diverſitati in dolijs; quippe hæc ſoliditas, cum ex unius formæ metatore computetur, non plus quàm uni figuræ doliorum quadrabit? Scio equidem; quare ut & illis ſatisfaciam, ad Th. XXX, partis primæ, illos ablego; illic invenient (Apollonij inquam, quærentes, invenient) unde ſuppleant, quod ſcientificæ demonſtrationi huius artificij adhuc deeſt.

Concluſio libri.

Conſtitueram errores aliorum, cum circa doliorum integrorum, tum etiam circa partis vacuæ dimenſiones, detegere, fundamentaq; Elenchorum monſtrare in Theorematibus huius libri. At cùm una veritas ſufficiat vel tacens, contra omnes errorum ſtrepitus; & jam anteà liber, vix decem initio Theorematum, præter opinionem excreverit: habeant igitur ſibi ſuos errores, quicunq; ijs delectantur; fruamur nos noſtris commodis; & ut fruendi materia, ſalvis corporis animiq; bonis, affatim ſuppetat, precabimur:

Et cùm pocula mille menſi erimus,
Conturbabimus illa, ne ſciamus.

FINIS.

Errata nonnulla Memoriæ vel typographica quæ ſparſim inter legendum occurrerunt, ſic corrige.

Pag. C. I. de eſt Nota Schematis VI. & VII.
Pag. C. 3. trum figuræ (addit utrinq; axem
Pag. D. 1. fac. b. plicatione & extractione numerorum &c. ſumma in trientem altitudinis Trunci &c.
Pag. D. 2. fac. b. per ſpicuitatis majoris cauſa ſic lege menta iſta ſegmenti, quorum baſis eſt ſemi circulus ſint alt. ſ. p, & ſ. 1. ſ. in o. a. r. p. candem ad cylindri ſegmentum æquealtum, quæ eſt totius vel primi ſegmenti ad totum æquealtum Cylindrum, ſc. 7 ad 33. Idem enim locum habet etiam in ſegmentis ſegmenti quorum baſis eſt circulus, ſemper enim ſegmentum hac baſi, ſive altũ ſive humile, eſt Cylindri ſui æquealti dimidium. Quibus verò baſes non ſ. c. e. ſ. ſ. a. c. ſegmenta, illis baſes itidem iſtæ ſingulæ ſingulas conciliant pportiones. Itaq; etiam de h. c. ſ. ſ. v. a. n. m. q. d. c. e. p. q. q inſiſtant eidem ſegmento circuli, ſ. u. a: quæ verò eidem lineæ ſegmenti circularis, ſint ut ſeg. altitudinis reſpondentia.
Pag. D. 3. linea penult: pro longiore lege breviore.
Pag. E. 1. f. b. gatur —— . —— Annulos
Pag. F. 2. b. ſegmento —— —— At cum AO OL —— —— VTRL pars —— —— VTRL
Pag. F. 4. ſit —— *dele* KO
cularis —— cui perpendiculares ſint
In Schemate LVXN & KVXO debebant eſſe æquales area & LVK MXP integra linea parallela.

Pag. G. 1. Zona —— —— Sch. VI. *ſic & in Margine.* per *KCN*
Pag. H. 2. per XXVII —— —— reliqui ſint
H. 3. pert —— —— dele Auſtriaci.
I. 3. f. b. una, LC. duæ. *In ſchemate XXI hic & quoties recurrit, continuetur CT uſq; in E, & VBRDA uſq; in H, in quam ducantur perpendiculares CS, TR, EA*
I. 4. dum inſt. —— —— H. G. B. pun. LA prop.
l. ultima longior eſt CK quam
K. 1. f. b. CG ad GA Trun *l.* AC erit — TC.AV &
K. 2. Sit q — 20000. — 20000 *l.* ſumma quadratorum *l.* Factus 18666667 *l.* quadratum AG
f. b. Sit CT 130, VA *l.* quibus uiam — minor CT
K. 3. quadrantes —— pars differentiæ reſp
f. b. CT. ſic — Cylindri æquealti & inſ gulum CT. AV
K. 4. f. b. 856 mul — 35 & f
L. 2. f. b. plus va — CT. AV. *L 3. ultimâ.* H. B.
M. 1. quadratum acclivis lateris FA
baſium CI ad CG.
f. b. CG ad — —— CHA prop
M. 3. portionis —— —— fiat majus ter-
N. 2. f. b. nion —— —— AYX, AYG
N. 3. f. b. Theor XXIX

Similia his ſicubi occurrerint, lector induſtrius ipſe corriget.